Lehrbuch

der

Geometrie und Trigonometrie

zum

Gebrauche in den Schulen

und

zum Selbstunterrichte,

von

Johann von Gott Bundschue,

Doktor der Philosophie, und Lyzeal-Professor der höheren Mathematik, wie auch erstem Professor an dem königlich-bayerischen Gymnasium zu Kempten, und korrespondirendem Mitgliede der allgemeinen kameralistisch-ökonomischen Gesellschaft zu Erlangen.

Dritter Theil,

welcher die Polygonometrie, oder vielmehr die Goniometrie enthält.

Mit 2 Tabellen, und 4 Figuren-Tafeln.

Kempten, 1828.

Druck und Verlag von Tob. Dannheimer.

Seiner

Hochwohlgeboren,

dem

Königlich-Bayerischen

Ministerial-Rathe

bei

dem Hohen Geheimen

Staats-Ministerium des Innern,

Herrn Doktor

Eduard von Schenk,

Vorstande

des Obersten Kirchen- und Studien-Rathes,

Ritter

des Zivil-Verdienst-Ordens der Bayerischen Krone ꝛc.

geweiht

in tiefester Verehrung

vom

Verfasser.

Hochwohlgeborner

Herr Ministerial-Rath!

Besonders Gnädiger Herr und Gönner!

Mit schüchterner Hand reiche ich Ihnen die magere Kornähre, Ihnen, Dem die Muse längst Kränze von Epheu gewunden, Dessen Haupt Bayern's Genius mit Lorbeer bekränzt hat! — Ihre Huld verschmäht auch die Kornähre nicht; sie entsprießte heimischem Boden, heimischer, stiller Fleiß hegte und pflanzte, was die Milde der Sonne, die vom Throne strahlt, erstarkte und schirmte: diese Sonne gab Segen und Gedeihen, — ihr gehört die Frucht. Wenn auch der Aether des Kunst-Himmels Sie umstrahlt; wenn Ihre Heimat die Tempel der Musen sind; und wenn hoch unter den Heroen klassischer Kunst Ihr gefeierter Name glänzt; — Ihr universeller Geist ist darum nicht abhold dem bescheidenen Veilchen im Thale! Hat doch Ihr Geist das Höchste erstrebt, das Seltenste! Der Themis hohe Priester leuchtete Ihr Gestirn hehr und freundlich zur Seite unserer Bayerischen Lykurge, und nicht schmelzte der Muse zartes Feuer, der Göttinn Szepter, härter als Stahl! — So viel ist der Mannheit beschieden, und den Günstlingen des Geschlechtes! Mit den reinsten Sinnen, gebadet in Kastaliens Quell, wanderten Sie hinüber vom Tempel der Strengen ohne Arm und Auge, in die geweihten Umarmungen der erhabenen Musen! Ich darf nicht fürchten, daß mein Kernchen Weihrauch den Zartsinn des Lesers anwidere;

weiter, als die teutsche Zunge reicht, rauchen Ihrem Beltsatr Altäre! Und welche stolzen Hoffnungen des Vaterlandes verbirgt nicht der tiefe Hintergrund! Mächtiger immer, breiter und tiefer woget der Strom Ihres Genie's, je weiter er sich ausgießt von des Urquells prangender Mündung in das weite Beet des fruchtbaren Lebens!

Es ist das Erstemal, daß ich mir Glück wünsche, Autor zu sein; wenn gleich wallend in den schroffen Tiefen des Nothwendigen und Nützlichen, wenn gleich keine Schwinge mich hebt in die Regionen des himmlischen Seins, des — Schönen, der ewigen Kunst! O, hätte die gütige Natur mir solche verliehen; — gebrochen und zerschmettert längst hätte sie der Neid der Zeit, gelähmt die Schwinge zum mäßigen Flug, wie die Flugmaschine des östlichen Bürgers an der Seine Strand der Neid des Franzmann's zerbrach, der nimmer da huldigt der teutschen Kraft. — Nur dem Autor übrigt Eine Feder, die kein Hebel der Intrigue zu brechen vermag. Diese Eine schwache Feder bringt mich in die Nähe Ihrer Huld, Ihrer Nachsicht! — Was ist der Professor gegen den Autor? — Wie er sich mühet, und plaget, wie er eifert und ringt; Arglist bewacht ihn oft, — nicht schaut sein redliches Mühen und Wirken das Auge des arglosen Herrn; — des Miethlings schielender Blick, buhlend um die Gunst des Gebiethers, und neidisch der Tugend des Gesindes, zeichnet mit schwarzer Schrift des Tages lichte That auf, und — Schatten nur, ohne Lichtseite, ist das Gemählde der verdienstlosen, Palmgeizenden Hand! — Der Treue erliegt, verschmähend die gleiche Waffe tückischer Wehre! — Denn nir-

gend auf offenem Felde, was er auch forschet, erblickt der vom giftigen Dolche Getroffene des Feindes Spur! — Seine Heimat ist die Nacht! — Warum ist der Redliche verdammt zum Sklaven der Nacht, wo keine wachende Brust seine Klagen vernimmt?

Herrliche Aula der neugebornen Hochschule, in dir ward die Freiheit wieder geboren! — Im Aether der Freiheit, unbewacht, und unbelauert von Arglist, schwebt, lebt und leibt der Musensohn! — Götter erscheinen seine Priester, der Weisheit Lehrer! — Beneidenswerthe Hochschule! Mögest du stets würdig beharren deiner hohen Freiheit, deines Adels! — Frei nicht, und ohne Bande der Führung darf der schwächere Zögling der Gymnasien wandern; — Vater und Freund sei ihm der Lehrer; — Gehorsam werde sein Glück; — er lerne gehorchen, damit er lerne zu herrschen, zuerst über sich selbst! — Aber der Lehrer der Gymnasiasten ist nicht Schüler: er ist durchgegangen die harten Prüfungen des hochwichtigen Berufes! — Ihm werde Selbstständigkeit, Freiheit! — Er ist Mann, und Staatsdiener. Er stehe an Freiheit nicht hinter dem Hochschüler! — Mit scharfer Umsicht und ritterlicher Probe werde er gewählt; aber dem — gewählten werde Vertrauen, Freiheit, Vorrang und Achtung im hohen Grade! Er werde nicht der Kontrole seines Gleichen untergeordnet, der so oft, und — so gewöhnlich angesteckt wird von dem Pesthauche des Egoism!

Und dieß Loos, diese Freiheit, rechtlich und edel, erwartet der Lehrer unter Ihren Auspizien, Erhabener Vorstand! — Aller Hoffnungen, und Gelobnisse kommen Ihnen entgegen. Nicht Anarchie,

nicht Despotism, am allerwenigsten schrankenlose Willkühr verlangt der Würdige: nein, nur eine ehrenhafte Freiheit, eine Selbstständigkeit, wie solche anderen Kategorien des höheren Staatsdienstes, — denn dahin ressortirt der Rang des wissenschaftlichen Lehrers, — längst zu Theil ward. — Uiber die Schüler führe das väterliche Regiment der Rektor, nicht über die Kollegen. Dann wird ein ehrsüchtiger Schwachkopf, unfähig, sich durch Werke der Publizität zu halten, und seinen Amtsgenossen anzugleichen, nicht in die gefährliche Versuchung gerathen, auf Kosten der Verdienste, und der Ehre seiner Kollegen nach Lob und Lohn zu ambitioniren; er wird im Weinberge des Herrn schaffen, durch Früchte den Baum bewähren; — und es unter seiner Würde erachten, als amtloser, müßiger Polizeiwächter zur Seite zu stehen. Der horchende Argwohn klage mein Bekenntniß, das ich im Allgemeinen ausspreche, nicht als Lokalsünde an, sie ist mir fremd; obgleich ein öffentlicher Ankläger erhaben steht über den geheimen Denunzianten. Das ist selbst der Wunsch des Besseren und sein Interesse.

Wie Vieles, wie Herrliches verdankt Ihnen bereits die öffentliche Erziehung! Wie Vieles, und Herrliches ist sie berechtigt, Ihren geistvollen Bemühungen noch in Zukunft zu verdanken! — Groß, in jeder Hinsicht, zeichnet sich des Großen Ludwigs Regierung! Möge auch das Gymnasium Seiner Hand die endliche Palingenesie verdanken! Mögen Euere Hochwohlgeboren als des Erhabensten Königs würdigstes Organ auch bald der Schöpfer neuer, wohlthätiger Umgestaltungen in diesem untergeordneten Bereiche werden. Mögen Hochdieselben es nicht

unter der Würde Ihres Berufes, und Ihrer außerordentlichen Talente halten, diesem untergeordneten Bezirke Ihr ganzes Augenmerk zu schenken; — das Hohe besteht nur durch das Untere; — fehlt dieß, so sinkt es selbst grundlos ein: — Gymnasien, Lyzeen bahnen die Königsstraße zum innersten Heiligthum der Wissenschaft und Kunst; — die hier versagten Opfer rächet die hohe Göttinn unerbittlich. Aber der gebundene, selbst im Geleise des Schülerhaften befangene Lehrer kann nicht einwirken; — deßhalb werde der Freie gewählt, und bleibe frei.

Ist ein ungehindertes, ungestörtes Selbstbewegen irgendwo nothwendig, heilsam, so ist es die Freiheit des höheren öffentlichen Lehrers. Jede edelste Frucht gedeiht, — reift im Licht und durch's Licht; nur Giftpflanzen schießen im düsteren Dunkel des lichtlosen Schattens auf. Deßwegen Heil unserer leitenden Höchsten Schulbehörde, die den Vortrefflichen, rühmlichst Ausgezeichneten, mit dem reinsten Lichte im Kopfe, und dem heiligen Feuer im Herzen, an ihrer Spitze ehrt! Nicht todter Buchstab, lebendiger Geist leitet die Schulen der Erkenntniß, der Wissenschaft und Kunst: darum werde auch mit Recht das Höchste gehofft, und erwartet. Unter Ihrem Lichtsterne müssen Bayerns Schulanstalten ihrer Vollendung entgegen gehen. Der selbst im Besitze des Höchsten, kann Mittleres, aber nicht Mittelmäßiges dulden. Die beglückten Lehrer werden sich nach Ihrem Vorbilde ihren Maaßstab nehmen, und das wahrhaft Große und Würdige anstreben, so viel an ihnen liegt. Ich meines Theil's darf Euerer Hochwohlgeboren geloben, daß ich mich durch die geistvollste Energie

unserer Erlauchtesten Regierung von einem neuen, reinsten Impulse gedrungen, und getrieben fühle, und daß ich meine innersten, geringen Kräfte all aufbiethen möchte, des jüngsten Rufes, des großen an die Zeit, nicht unwerth zu sein.

Bei diesem Gelobnisse aber muß sich auch mein geringes Talent beschränken. Nicht das reiche, lohnende Füllhorn spreche ich an, aus dem das Vaterland glänzenden Preis schöpft, dem Heroen, dem Hochverdienste der Zeit, den Mitschöpfern der besseren Zukunft: ich bescheide mich, gerne verzichtend auf die nicht verdienten Lorbeeren, und fordere und erflehe nur den Schutz der Hohen Aegide, daß mich nicht der gemeine Troß überfalle, und — selbst unfruchtbar, mir die Früchte meines einsamen Tagwerkes raube.

Ich fühle mich dankerstummend von Ihrer kräftigen Hand beschirmt, und geharre in tiefer Ehrfurcht

Euerer Hochwohlgeboren,

Gnädiger Herr Ministerial-Rath!

Kempten,
den 1. März 1828.

unterthänig gehorsamster

Dr. Johann Bundschue,

Lyzeal-Professor der höheren Mathematik.

Vorrede.

Mehrere unvorhergesehene Geschäfte, welchen ich nicht ausweichen konnte, und die Schwierigkeiten selbst, die bei der Bearbeitung des gegenwärtigen dritten Theiles meines Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie zu überwinden waren, hinderten die frühere Erscheinung dieses Bandes, welcher zur Fortsetzung und Erweiterung der ebenen Trigonometrie die Polygonometrie, oder vielmehr die Goniometrie enthält.

Weil die ebene oder Plan-Trigonometrie die geradlinigten ebenen Dreiecke zum Gegenstande hat, und sich die Goniometrie mit den geradlinigten ebenen Figuren, oder auch überhaupt mit gerad gebrochenen, in der nämlichen Ebene liegenden Linien befaßt, so hielt ich es für passend, in diesem Bande auf die im II. Theile desselben Lehrbuches vorgetragene Plantrigonometrie unmittelbar die Polygonometrie als eine Anwendung der trigonometrischen Lehrsätze auf geradlinigte ebene Figuren überhaupt, und auf die erwähnten gebrochenen Linien folgen zu lassen.

Gerne hätte ich noch, wie ich es auch früherhin Willens gewesen bin, in den gegenwärtigen Theil die sphärische Trigonometrie aufgenommen; es ward aber derselbe im Verhältnisse zu den übrigen Theilen durch die Polygonometrie allein schon zu sehr erweitert, weil ich diese wegen ihres hohen wissenschaftlichen Werthes, und ihrer vielfachen Anwendbarkeit bei der praktischen Geometrie und Trigono-

metrie gründlich, und ausführlich behandeln mußte, wenn anders der Vortrag über diesen, nicht mehr neuen mathematischen Zweig für das sachverständige Publikum ein Interesse haben soll.

Daß die Polygonometrie als die erweiterte, oder höchste ebene Trigonometrie nicht immer so erkannt, und benützt wird, wie sie es ihrer besonderen Vorzüge wegen verdient, rührt wohl auch öfters von der mangelhaften Darstellung und Anwendung ihrer Grundlehren her. Was man nicht gehörig erkennt, und wovon man keine bestimmte, deutliche Begriffe hat, das hat auch einen geringen subjektiven Werth, und verliert sich wieder, ohne daß davon zur fortgesetzten wissenschaftlichen Bildung, und für das praktische Leben ein zweckmäßiger Gebrauch gemacht wird. — Doch sei aber dieses keineswegs von den hochverdienten Mathematikern gesagt, die diesen Gegenstand aller Aufmerksamkeit gewürdigt haben, und in ihren gemeinnützigen Schriften die Polygonometrie mit sehr vieler Gründlichkeit und Deutlichkeit behandeln. Ich nenne in dieser Beziehung mit dankbarer Verehrung nebst den Werken von Dåzel, Neumann ꝛc. das mathematische Lehrbuch des Herrn geistlichen Rathes und vormaligen Universitäts-Professors Magold, welches ich wieder auf eine ganz vorzügliche Weise benützt habe. Im letzteren findet man die Grundlehren der Polygonometrie ausführlich vorgetragen, und durch die angeführten Beispiele zur Auflösung der dahin gehörigen Aufgaben benützt, und in Dåzel's und Neumann's Schriften sind nicht nur die ersten Grundsätze derselben vollkommen entwickelt und erwiesen, sondern auch diese letzteren zur Vermessung und Vertheilung der Figuren angewendet.

Wie der Herr geistliche Rath Magold, so wählte ich ebenfalls anstatt der äußeren oder Neben-Winkel immerhin die inneren vorkommenden Winkel der Figuren selbst, und es ist dieses auch bei der Angabe der Winkel der geradlinigten ebenen Figuren der Fall, die am Ende dieses Theiles im Anhange zur Uibung in polygonometrischen Berechnungen beigefügt sind. Die darin aufgeführten gemessenen Vielecke, wofür ich keine Figuren-Tafeln mehr verfertigte, da man sie nach den aufgestellten Lehrsätzen aus den bekannten Seiten und Winkeln selbst verzeichnen kann, habe ich zum Theile aus Neumann's Beiträgen zur praktischen Geometrie genommen, und mehrere derselben verdanke ich der gütigen Mittheilung des Herrn Benedikt Jakobi, hiesigen Geometers und vormaligen Stadtmagistrats-Rathes. Dieser hat bei seinen Vermessungen die polygonometrischen Lehrsätze vielfach in Anwendung gebracht, und sich, wie es das Programm zur Feier des Zentrallandwirthschafts- oder Oktober-Festes im Jahre 1826 auf Seite 56 und 57. öffentlich bekannt macht, durch die schnelle, und zur größten Zufriedenheit aller Betheiligten geführte Leitung und Auseinandersetzung einer Menge von Arrondirungen der Güter große Verdienste erworben; deßwegen erhielt er zur Belohnung in demselben Jahre durch das General-Comité des landwirthschaftlichen Vereins in Bayern die große goldene Vereins-Medaille.

Damit das Buch auch in Absicht auf die gewählten Beispiele allgemein brauchbar ist, so habe ich die vorkommenden Linien und Flächen in keinem bestimmten Längen- und Flächen-Maaße eines gewissen Landes bezeichnet, und die Berechnungen dadurch abgekürzt, daß mehrentheils die Größe der

Winkel nur in Graden und Minuten ausgedrückt wurde. Wie die entwickelten Formeln zu benützen sind, wenn dieselben auch bis auf Sekunden, oder Zehentel von Sekunden angegeben werden, ist zureichend aus der Anweisung bekannt, die man im II. Theile dieses Lehrbuches beim Vortrage der ebenen Trigonometrie im III. Abschnitte des I. Hauptstückes über den Gebrauch der trigonometrischen Tabellen findet. Daß man sieht, wie sich die folgenden Berechnungen durch die früheren erproben, und welche genaue Resultate nach den trigonometrischen und polygonometrischen Lehrsätzen zum Vorscheine kommen, im Falle man eine richtige Vermessung der gegebenen Stücke voraussetzen darf, so habe ich auch öfters mehrere Aufgaben nach einer und derselben geradlinigten ebenen Figur aufgelöst, und zugleich bei der Berechnung der unbekannten Winkel aus den gegebenen Seiten und Winkeln in beigefügten besonderen Zusätzen angegeben, in wie ferne die unbekannten Stücke aus den bekannten Seiten und Winkeln allein, oder nebst diesen auch noch in Berücksichtigung der Zeichen der trigonometrischen Linien, und der Beschaffenheit der Figuren, oder überhaupt der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linien gefunden werden können, und zu diesem Zwecke im §. 48. die Bedingungen zusammengestellt, unter welchen geradlinigte ebene Figuren durch die gegebenen Stücke, und die benöthigte Rücksichtsnahme auf die Beschaffenheit der Figuren, und die Zeichen der trigonometrischen Linien zur Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel bestimmt sind.

Mehr, als es im vorliegenden Bande geschehen ist, konnte ich mich über die Anwendung der gonio-

metrischen Grundlehren auf die Geometrie und Trigonometrie nicht verbreiten, weil ich bei der Verfassung dieses Lehrbuches, welches als Leitfaden vorzüglich für den, an höheren Studienanstalten zu ertheilenden mathematischen Unterricht bestimmt ist, die Absicht nicht haben konnte, eine ausführliche Anleitung für die praktischen Geometer zu liefern, und ich verweise diese bei ihren geometrischen und trigonometrischen Arbeiten zum Behufe der Anwendung der Polygonometrie sowohl auf die angeführten Werke, als auch auf die vortrefflichen Schriften des Königl. Bayer. Hofrathes und dermaligen Professors an der Hochschule zu München, Herrn Dr. Leonhard Späth, und ganz besonders auf dessen praktische Geometrie, angewandt für die Aufnahme großer Distrikte, der Flur-, Aemter- und Profil-Charten, so wie der Gemeindetheilungen, der Taxation, Arrondirung und Zerschlagung der Güter 2c.

Wie meine früheren Schriften in Folge Allerhöchster Königlicher Entschließungen, eben so wurde auch die zweite Auflage des I. Theiles meines Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie, welcher die Longimetrie und Planimetrie enthält, zu meiner allerunterthänigsten Verdankung von der Allerhöchsten Stelle in Gemäßheit eines Hohen Ministerial-Reskriptes aus München vom 4. Mai 1826 mit Allergnädigstem Wohlgefallen aufgenommen, und es erschienen neuerdings über meine beiden mathematischen Lehrbücher in den öffentlichen Blättern, namentlich in der Literaturzeitung für Schullehrer aus Ilmenau (1826. I. Quartalheft, und 1827. I. Heft.), die günstigsten Beurtheilungen und Anempfehlungen. Dadurch aufgemuntert, werde ich mei-

ne literarischen Arbeiten fortsetzen, und noch in diesem Jahre den II. Theil dieses Lehrbuches, in welchem die Stereometrie, und die ebene Trigonometrie nebst der Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Feldmeßkunst vorkommt, in einer erneuerten Auflage zum Drucke befördern.

Es sind bald 24 Jahre vorüber, daß ich an dem Königlichen Lyzeum zu Dilingen durch die vortrefflichen Lehrvorträge meines ausgezeichneten, mir immer unvergeßlichen mathematischen Bildners, des Herrn Hofrathes und akademischen Professors Dr. Ferdinand Mahir, mit den Grundsätzen der Polygonometrie bekannt wurde, und in den bis jetzt verflossenen 20 Jahren meines öffentlichen Lehramtes, während welcher mir durch die Allerhöchste Königliche Gnade an Gymnasien und Lyzeen ausschlußweise mein Lieblingsfach, die Mathematik, als Unterrichtsgegenstand übertragen wurde, habe ich auch stets mit besonderer Vorliebe das Studium der Goniometrie fortgesetzt. — Möge nun auch die große, auf die Verfassung des gegenwärtigen dritten Theiles meines geometrischen und trigonometrischen Lehrbuches verwendete Mühe mit Beifall aufgenommen, und diesem Bande beim Schul- und Privat-Gebrauche dieselbe günstige Aufnahme und Verbreitung zu Theil werden, deren sich meine sämmtlichen übrigen mathematischen Werke im In- und Auslande erfreuen!

Kempten, den 1. März 1828.

Dr. Johann Bundschue,
Lyzeal-Professor.

Polygonometrie,

oder vielmehr

Goniometrie.

I. Hauptstück.

Grundlehren der Polygonometrie.

I. Abschnitt.

Erklärungen und Lehrsätze, die Ordinaten und Abszissen gebrochener gerader Linien betreffend.

§. 1.

Bestimmung der Lage der einzelnen Theile gebrochener gerader Linien.

a) Wenn gleich die Lage zweier gerader Linien, die in einem Punkte indirekte zusammenstoßen, sowohl durch den hohlen Winkel, den sie auf der einen Seite, als auch durch den erhabenen Winkel, den sie auf der anderen Seite bilden, vollkommen bestimmt ist (I. §. 9. a, b und Zus. I.), so versteht man doch unter den Winkeln einer geradlinigten ebenen Figur nur diejenigen Winkel, welche die Linien auf der inneren Seite der Figur bilden, und bei welchen somit die Kreisbögen, welche sie messen (I. §. 63. Zus. II.), immer innerhalb der Figur sind.

Auf diese Weise enthält die Figur 1. lauter auswärts gehende oder hohle Winkel; die Figur 2. aber hat bei C einen einwärts gehenden oder erhabenen Winkel (I. §. 52. e.), die übrigen Winkel sind bei ihr ebenfalls hohl oder auswärts gehend.

b) Nimmt man bei einer gerad gebrochenen, oder gebrochenen geraden Linie überhaupt (I. §. 3. c.) auf die Figur, welche etwa durch sie gebil-

det wird (I. §. 12. a.), keine Rücksicht, und liegen alle Theile der gebrochenen Linie in der nämlichen Ebene, so bestimmt man die Lage der einzelnen geraden Linien zu einander auf folgende Weise:

1) Allemal betrachtet man den Winkel an jedem Ecke so, daß man den hohlen Winkel vor sich hat, und man sich somit außerhalb der Schenkel des hohlen Winkels auf der erhabenen Seite desselben befindet.

2) Bei dem ersten Ecke, z. B. bei A (Fig. 3.) nimmt man den hohlen Winkel BAF als Bestimmungswinkel der Lage der geraden Linien AB und AF zu einander an, und man bemerkt sich, wenn man den hohlen Winkel vor sich hat, die Stellung dieser zwei Linien; in diesem Beispiele ist die erstere Linie AB links, und die letztere AF rechts.

3) Geht man zu den folgenden Ecken B, C, D, E und F in der angeführten Ordnung, so nimmt man, wo die einschließenden Schenkel die nämliche Stellung haben, wie bei B und D, bei welchen ebenfalls die vorangehende Linie rechts, und die folgende links zu liegen kommt, die hohlen Winkel als Bestimmungswinkel.

4) Wo hingegen die einschließenden Schenkel die umgekehrte Stellung haben, das ist, wo der vorangehende Schenkel links, und der nachfolgende rechts ist, wie es bei C, E und F der Fall ist, da nimmt man die erhabenen Winkel als Bestimmungswinkel.

5) Läge aber bei dem ersten Ecke für den hohlen Winkel der vorhergehende Schenkel links, und der folgende rechts, wie z. B. (Fig. 2.), wenn man bei E anfängt, und gegen D, C, B und A hin in voriger umgekehrter Ordnung der Ecke die Lage der gebrochenen Linie bestimmt, so nimmt man jederzeit, wo der vorangehende Schenkel links, und der folgende rechts liegt, den hohlen Winkel, wie bei E, D, B und A, und bei umgekehrter Stellung der Schenkel, wie bei C, den erhabenen Winkel als Bestimmungswinkel der Lage der einzelnen Linien, welche die Theile der gebrochenen Linie EDCBA sind.

c) Man sagt, jede geradlinigte ebene Figur (I. §. 13. a.) habe 2n Stücke, indem eine geradlinigte ebene Figur von n Seiten (I. §. 12. a und g.) eben so viele Winkel oder Ecke (I. §. 12. Zus. II.), mithin n Seiten und n Winkel, das ist, zusammen 2n Stücke hat.

I. Zusatz: Wenn eine gebrochene gerade Linie die Gränze oder der Perimeter einer geradliniigten ebenen Figur ist, so erkennt man die erhabenen Winkel, welche zur Bestimmung der Lage der Seiten zu einander zu nehmen sind, auch daraus, daß bei ihnen die Verlängerungen der Schenkel am Scheitel in die Figur hineinfallen, während bei den hohlen Winkeln, welche als Bestimmungswinkel der Neigung der Seiten zu einander angenommen werden, das Gegentheil Statt findet (I. §. 52. e.).

II. Zusatz: Wenn man anstatt des erhabenen Bestimmungswinkels das Maaß des entsprechenden hohlen Winkels, der jenen zu 360 Graden ergänzt, angibt, so bezeichnet man den letzteren mit dem Zeichen „—“, damit man daraus erkennt, daß eigentlich der korrespondirende erhabene Winkel bei der Berechnung als der vorkommende Bestimmungswinkel zu nehmen ist; denselben erhält man allemal, wenn man den angegebenen hohlen Winkel von 360 Graden abzieht (I. §. 11. Zus. V.).

Anmerkung: Die Zitationen der §§., und der Figuren aus dem I. und II. Theile dieses Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie, so wie aus dem bisher von mir in vier Theilen herausgegebenen Lehrbuche der Arithmetik geschehen hier z. B. auf folgende Weise:

a) »I. §. 6., oder II. §. 60.« bedeutet »man sehe im I. Theile dieses Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie den §. 6., oder man sehe in diesem nämlichen Lehrbuche im II. Theile den §. 60.«

b) Dann »I. Fig. 57., oder II. Fig. 27.« zeigt an »man schlage im nämlichen Lehrbuche der Geometrie und Trigonometrie im I. Theile die Figur 57., oder im II. Theile desselben die Figur 27. auf.«

c) Endlich »Arithm. III. §. 98., oder Arithm. IV. §. 1.« bedeutet »man sehe im III. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik den §. 98., oder im IV. Theile desselben Lehrbuches den §. 1.«

§. 2.

Goniometrie und Polygonometrie.

a) Die Wissenschaft, aus $2n - 3$ Stücken einer geradlinigten ebenen Figur von n Seiten die übrigen drei unbekannten Stücke, wenn diese nicht lauter Seiten sind, durch Rechnung zu finden, heißt Goniometrie.

b) Die Goniometrie wird Polygonometrie genannt, wenn sie die mehrseitigen geradlinigten ebenen Figuren zum Gegenstande hat, und deßhalb vorzüglich zur Bestimmung und Auflösung der Vielecke oder Polygone angewandt wird (I. §. 13. a.).

I. Zusatz: Weil das Dreieck drei Seiten und drei Winkel, also ebenfalls 2n Stücke hat, und die Plan- oder ebene Trigonometrie lehrt, aus $2n - 3$, oder aus drei gegebenen Stücken eines geradlinigten ebenen Dreiecks, wenn diese nicht lauter Winkel sind, die übrigen zu finden (II. §. 61. a und b.), so zerfällt die Goniometrie als die allgemeine Wissenschaft in die Trigonometrie, und in die Polygonometrie; jene hat die Dreiecke, diese hingegen die mehrseitigen geradlinigten ebenen Figuren, oder die Vielecke, und die gerad gebrochenen Linien überhaupt zum Gegenstande.

II. Zusatz: Die polygonometrischen Lehrsätze trägt man allgemein ohne eine bestimmte Rücksicht auf eine gewisse Anzahl der Seiten der Figur, oder der einzelnen Theile einer gebrochenen geraden Linie vor, und behandelt deßhalb unter dem Namen der Polygonometrie die Goniometrie, während in der Trigonometrie immerhin nur von den Dreiecken, das ist, von geradlinigten ebenen Figuren die Rede ist, welche durch drei Linien begränzt sind, die man Seiten heißt (I. §. 13. a.). Man nennt jene Wissenschaft nur deßwegen Polygonometrie, weil ihre Lehrsätze zur Auflösung oder Bestimmung der Vielecke oder der mehrseitigen Figuren dienen, und die geradlinigten ebenen Dreiecke, die man ebenfalls nach denselben berechnen könnte, einfacher und bequemer nach den eigends für

sie in der Plantrigonometrie aufgestellten Lehrsätzen aufgelöst werden.

III. Zusatz: Die Winkel und Seiten einer Figur stehen zu einander in keinem bestimmten Verhältnisse (II. §. 61. Anmerk. 2.); deßhalb können sie auch unmittelbar nicht mit einander verglichen werden. Man drückt aber die Größe der Winkel und ihrer Bögen durch die Verhältnisse der angeführten trigonometrischen Linien aus, und berechnet nach diesen die unbekannten Stücke; aus diesem Grunde ist die Polygonometrie auch ein Theil, oder eine Erweiterung der ebenen Trigonometrie.

IV. Zusatz: Bei einer geradlinigten ebenen Figur liegen alle Ecke oder Scheitelpunkte der Winkel, und deßhalb auch alle Winkel und Seiten in der nämlichen Ebene, und bei einer gebrochenen geraden Linie überhaupt setzt man in der Polygonometrie voraus, daß ebenfalls alle Scheitelpunkte der Winkel der einzelnen geraden Linien in einer und derselben Ebene liegen, und deßhalb die gebrochene gerade Linie selbst in der nämlichen Ebene ist, oder immerhin eine Ebene gedacht werden kann, in welcher dieselbe ganz liegt.

Anmerkung: 1) Wenn ich beim Vortrage der Goniometrie oder Polygonometrie von einer gebrochenen Linie rede, so verstehe ich darunter allezeit eine gerad gebrochene, oder gebrochene gerade Linie, deren einzelne Theile gerade Linien sind (I. §. 3. c.), und in der nämlichen Ebene liegen.

2) Wenn die Trigonometrie als ein Theil der Goniometrie, oder die Polygonometrie als eine Erweiterung der Trigonometrie betrachtet wird, so versteht man unter dem Worte »Trigonometrie« allemal die Plan- oder ebene Trigonometrie, welche die geradlinigten ebenen Dreiecke zum Gegenstande hat (II. §. 61. b.).

§. 3.

I. Lehrsatz:

Nimmt man bei einer geradlinigten ebenen Figur, oder bei einer gebrochenen Linie überhaupt

in der nämlichen Ebene, in welcher jene liegen, eine beliebige gerade Linie als Abszissenlinie an, und zieht man von jedem Ecke oder Winkel auf sie rechtwinklichte Ordinaten, so ist durch die Lage und Größe aller Abszissen und Ordinaten die Lage und Größe des Perimeters der Figur, und der gebrochenen Linie überhaupt, somit der Perimeter, und die gebrochene Linie selbst vollkommen bestimmt.

B e w e i s :

1) Man nehme (Fig. 1 und 2.) bei den geradlinigten ebenen Figuren ABCDE die Seite AE als Abszissenlinie, und A als den Anfangspunkt an, und ziehe auf sie noch von den Ecken B, C und D, da die Ecke A und E in derselben liegen, die Perpendikel Bh, Cn und Dq; es sind diese die rechtwinklichten Ordinaten, und die auf der Abszissenlinie, oder auf ihrer Verlängerung abgeschnittenen Theile Ah, An, Aq und AE sind die dazu gehörigen Abszissen (I. §. 102. Zus. II.).

2) Bei der gebrochenen Linie ABCDEF (Fig. 3.) nehme man die gerade Linie AF als Abszissenlinie und A als ihren Anfangspunkt an, und ziehe auf sie die Perpendikel oder Ordinaten Bh, Cm, Dn und Eq; es sind dann die Linien Ah, Am, An, Aq und AF die entsprechenden Abszissen.

4) Durch die Abszisse Ah und ihre Ordinate hB (Fig. 1 und 2.) ist wegen der rechten Winkel bei h in beiden Figuren die Lage der Ecke bei B, dann durch die Abszisse An und ihre Ordinate nC ist die Lage der Ecke bei C, nnd so fortgesetzt, bestimmt (I. §. 20. Zus.), das ist, durch die Lage und Größe aller entsprechenden Abszissen und Ordinaten ist die Lage aller Ecke bestimmt.

4) Bei der gebrocheuen Linie überhaupt (Fig. 3.) ist durch die Abszisse Ah und ihre Ordinate hB der Punkt B, dann durch Am und mC der Punkt C, ferner durch An und nD der Punkt D, und so fort-

gesetzt, bestimmt, das heißt, durch die Größe und Lage aller entsprechenden Abszissen und Ordinaten ist die Lage aller Scheitelpunkte bestimmt, an welchen die einzelnen Theile der gebrochenen Linie zusammenstoßen.

5) Sind aber bei einer Figur, oder überhaupt bei einer gebrochenen Linie alle Ecke, oder alle Scheitelpunkte der Winkel bestimmt, unter welchen die einzelnen Linien als Theile derselben zusammenstoßen, so sind auch dadurch alle jene Winkel, und diese einzelnen Linien ihrer Größe und Lage nach bestimmt, das heißt, durch die Größe und Lage aller entsprechenden Ordinaten und Abszissen ist die Lage und Größe der gebrochenen Linie, so wie die geradlinigte ebene Figur vollkommen bestimmt (I. §. 6.).

I. Zusatz: Nimmt man (Fig. 1.) bei einer Figur ABCDE die Seite AE als Abszissenlinie, und A als ihren Anfangspunkt an, und nimmt man die Abszissen von A gegen E positiv, so wird für das Eck A die Abszisse $= 0$; die der Ecke B entsprechende Abszisse Ah, welche man am Punkte A durch die Verlängerung der Seite AE erhält, wird wegen ihrer Lage, die der Lage der Abszissen von A gegen E entgegengesetzt ist, negativ; für die übrigen Ecke C, D und E werden die Abszissen An, Aq und AE positiv; beim letzten Ecke E ist die zur Abszissenlinie angenommene Seite AE die Abszisse.

Dagegen sind die Ordinaten für das erste und letzte Eck bei A und E an den Endspunkten der Abszissenlinie gleich Null, und bei den übrigen Ecken B, C und D sind die entsprechenden Ordinaten die Perpendikel Bh, Cn und Dq, welche sämmtlich die nämliche Richtung haben, und auf der oberen Seite der Abszissenlinie liegen, weßhalb man sie positiv nennt.

II. Zusatz: Bei der Figur 2., welche bei C einen erhabenen Winkel hat, und wo ebenfalls AE als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt angenommen ist, sind für die Ecke A, B, C, D und E die Abszissen 0, dann Ah, An, Aq und AE, und die entsprechenden Ordinaten sind 0, Bh, Cn, Dq und 0, und hier sind alle Abszissen und alle Ordinaten po-

sitiv, weil jene immerhin die Richtung von A nach E haben, und diese auf der nämlichen oberen Seite der Abszissenlinie AE liegen.

III. Zusatz: Nimmt man (Fig. 3.) unter einem beliebigen bekannten Winkel BAF am Anfangspunkte A der gebrochenen Linie ABCDEF die Abszissenlinie AF an, und zieht man auf sie von allen Ecken oder Scheitelpunkten der Winkel A, B, C, D, E und F Perpendikel, so sind 0, Ah, Am, An, Aq und AF die Abszissen, und 0, Bh, Cm, Dn, Eq und 0 die entsprechenden Ordinaten; sämmtliche Abszissen haben die Richtung von A nach F, und werden deßhalb positiv genannt; von den Ordinaten nennt man die Perpendikel Bh und Dn, da sie auf der oberen Seite von AF liegen, positiv, und die Ordinaten Cm und Eq wegen ihrer entgegengesetzten Lage negativ.

IV. Zusatz: Wie bei den angeführten zwei Figuren (Fig. 1 und 2.) an den Endspunkten A und E allemal die erste und letzte Ordinate gleich Null, und am Anfangspunkte A die Abszisse = 0, und am letzten Punkte E diese die angenommene Abszissenlinie ist, eben so ist auch bei der gebrochenen Linie, welche keine Figur bildet (Fig. 3.), an den Endspunkten A und F die erste und letzte Ordinate = 0, und die Abszisse ist bei A = 0, und bei F = AF.

V. Zusatz: Die inneren Winkel einer Figur, und die Bestimmungswinkel einer gebrochenen Linie (Fig. 1 — 3.) werden in der Folge immer der Ordnung nach mit den größeren Buchstaben A, B, C, D, E ꝛc., und die anliegenden Seiten oder Schenkel AB, BC, CD, DE ꝛc. der Ordnung nach mit den kleineren Buchstaben a, b, c, d ꝛc. bezeichnet.

VI. Zusatz: Der Kürze wegen wird bei den Verhältnissen der vorkommenden trigonometrischen Linien der rechte Winkel wieder = R, und der Halbmesser in der Folge = 1 gesetzt; bei den wirklichen Berechnungen oder Auflösungen der Aufgaben muß aber der Halbmesser wieder = r = 10^{10} gesetzt werden, damit nach den in den Tabellen berechneten trigonometrischen Linien sein Logarithmus als der Lo-

garithmus des Radius oder des Sinus totus = 10 ist (II. §. 93. Zus. 11.).

Anmerkung: 1) Man könnte auch die unteren Ordinaten und die Abszissen gegen die linke Seite positiv nennen, es wären dann die oberen Ordinaten und die Abszissen gegen die rechte Seite negativ; man bleibt aber gewöhnlich bei der bisher festgesetzten Ordnung, nach welcher die oberen Ordinaten positiv, und die unteren negativ heißen, während vom Anfangspunkte A aus die Abszissen gegen die rechte Seite positiv, und gegen die linke hin negativ genannt werden.

2) Würde man bei einer Figur die Abszissenlinie von oben nach unten annehmen, und die Abszissen in der Richtung nach unten positiv heißen, so wären die Abszissen vom Anfangspunkte A aus in der Richtung nach oben negativ, während die Ordinaten links negativ wären, wenn die Ordinaten rechts positiv genannt würden.

3) Die angenommene Basis muß bei den gebrochenen Linien überhaupt, wie bei den geradlinigten ebenen Figuren, allemal in der nämlichen Ebene sein, in welcher die Figuren, oder die gebrochenen Linien überhaupt liegen.

Am Füglichsten nimmt man bei geradlinigten Figuren eine Seite als Abszissenlinie, und ihren Anfangspunkt so an, daß dieser links liegt, und man die Figur von der linken zur rechten Seite vor sich hat; in welcher Lage dann die Abszissen von der Linken zur Rechten, und die oberen Ordinaten positiv heißen, und dagegen die Abszissen und Ordinaten, welche eine entgegengesetzte Lage haben, negativ genannt werden.

4) Nimmt man bei einer gebrochenen Linie eine beliebige gerade Linie als Abszissenlinie an, so muß der Winkel gegeben sein, oder willkürlich bestimmt werden, unter welchem dieselbe die gebrochene Linie berührt oder schneidet, und bei dieser nimmt man ebenfalls passend den Anfangspunkt links an, damit man sie von der linken zur rechten Seite vor sich hat; die angenommene Abszissenlinie darf auch die gebrochene Linie ein- oder mehrmal durchschneiden.

5) Die Abszissenlinie wird von einigen auch Standlinie, und Basis oder Grundlinie genannt; und rechtwinklichte Ordinaten nennt man auch schlechthin nur Ordinaten, weil bestimmt vorausgesetzt wird, daß sie mit ihren Abszissen immerhin unter rechten Winkeln zusammenstoßen.

6) Da in den Formeln, welche in der Polygonome-

trie angeführt werden, der Kosinus sehr oft vorkommt, so werde ich der Kürze wegen »Cos.« anstatt »Cosin.« schreiben (II. §. 60. Anmerk. 2.), und unter jener Bezeichnung allemal den Kosinus verstehen; sollte die Kosekans vorkommen, so wird zum Unterschiede in der Abkürzung »Cosec.« geschrieben werden.

§. 4.

II. Lehrsatz:

Nimmt man bei einer geradlinigten ebenen Figur eine beliebige Seite als Abszissenlinie, und einen Endspunkt dieser letzteren als Anfangspunkt an, so erhält man für jedes beliebige Eck der Figur die entsprechende Ordinate, wenn man jede vom Anfangspunkte bis zum gegebenen Ecke liegende Seite in den Sinus aller jener Winkel, welche jedesmal vom Anfangspunkte bis an diese Seite vorkommen, multiplizirt, und die einzelnen Produkte positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Anzahl der Winkel ungerade oder gerade ist; und die jedesmal entsprechende Abszisse erhält man, wenn man jede Seite auf die nämliche Weise in den Kosinus der genannten Winkel multiplizirt, und wieder die Produkte, welche die Winkel in einer geraden Zahl oder paarweise enthalten, negativ, die übrigen Produkte aber positiv setzt. Das heißt (Fig. 4 und 5.), wenn man AF als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt annimmt, so ist

I. die entsprechende Ordinate

für $A = 0$,

» $B = a \,.\, \text{Sin. } A$,

» $C = a \,.\, \text{Sin. } A - b \,.\, \text{Sin. } (A + B)$,

» $D = a \,.\, \text{Sin. } A - b \,.\, \text{Sin. } (A + B) + c \,.\, \text{Sin. } (A + B + C)$,

für E = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D),
» F = 0 = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E); und

II. die entsprechende Abszisse
für A = 0,
» B = a . Cos. A,
» C = a . Cos. A — b . Cos. (A + B),
» D = a . Cos. A — b Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C),
» E = a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) — d . Cos. (A + B + C + D),
» F = f = a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) — d . Cos. (A + B + C + D) + e . Cos. (A + B + C + D + E).

I. Beweis:

Wenn die Abszissenlinie eine Seite einer geradlinigten ebenen Figur von lauter hohlen Winkeln ist.

1) Vom Anfangspunkte A aus (Fig. 4.) ziehe man von jedem Ecke auf die Abszissenlinie AF ein Perpendikel, oder die rechtwinklichte Ordinate, nachdem man vorhin gegen die linke Seite hin am Punkte A die Abszissenlinie AF um das Stück Am verlängert hat.

2) Um zwischen einer Ordinate, und ihrer nächstvorhergehenden und nachfolgenden den Unterschied zu bestimmen, ziehe man noch durch die Ecke B, C und E zur Abszissenlinie die Parallelen Bq, dann Cs und Et, bis solche mit den zunächst gelegenen Ordinaten zusammentreffen.

3) Die Ordinate ist für
das Eck A = 0 (§. 3. Zus. I.),
» » B = Bm,
» » C = Cn = nq + qC = Bm + Cq (I. §. 41. Zus. IV.)
» » D = Do = os + sD = Cn + Ds = Bm + Cq + Ds,

das Eck E = Ep = ot = Do — Dt = Bm + Cq + Ds — Dt,
» » F = 0 = Ep — Ep = Bm + Cq + Ds — Dt — Ep.

4) Die Abszisse ist für
das Eck A = 0 (§. 3. Zus. 1.),
» » B = — Am (§. 3. Zus. 1.),
» » C = An = mn — Am = Bq — Am = — Am + Bq,
» » D = Ao = An + no = An + Cs = — Am + Bq + Cs,
» » E = Ap = Ao + op = Ao + tE = — Am + Bq + Cs + tE,
» » F = AF = f = Ap + pF = — Am + Bq + Cs + tE + pF.

5) Man bezeichne die spitzigen Winkel, welche die Seiten der Ordnung nach mit der Abszissenlinie, und mit den zu ihr gezogenen Parallelen einschließen, mit den kleinen griechischen Buchstaben, das ist, man setze BAm = α, CBq = β, DCs = γ, DEt = δ, und EFA = EFp = ε.

6) Es ist jetzt
α = 2R — BAF (I. §. 8. Zus. III.) = 2R — A (§. 3. Zus. V. und VI.),
β = ABC — ABq = B — ABq = B — α (I. §. 41.) = B — (2R — A) = B — 2R + A (Arithm. III. §. 49.) = A + B — 2R,
γ = BCD — BCq — nCs = C — BCq — R (I. §. 41. Zus. VII.) = C — (R — β) — R (I. §. 43. Zus. V.) = C — R — R + β = C — R — R + A + B — 2R = A + B + C — 4R,
δ = R — tDE = R — (D — CDs) = R — D + CDs = R — D + R — γ = R — D + R — (A + B + C — 4R) = R — D + R — A — B — C + 4R = 6R — (A + B + C + D),
ε = R — pEF = R — (E — R — δ) = R — E + R + δ = R — E + R + 6R — (A + B + C + D) = 8R — (A + B + C + D + E).

7) Der spitzige Winkel α ist $= 2R - A$, weßhalb $A + \alpha = 2R$, und (II. §. 65. und §. 69. Zus.) Sin. α = Sin. A, wie auch Cos. $\alpha = -$ Cos. A (II. §. 71.);

8) $\beta = A + B - 2R$, also $(A + B) - \beta = 2R$, und β ist das Supplement zur Summe der Winkel $A + B$, welche in dritten Quadranten fällt (II. §. 64. b. und d.), weßhalb (II. §. 65. und §. 69. Zus).

Sin. $\beta = -$ Sin. $(A + B)$ (II. §. 66.), und

Cos. $\beta = -$ Cos. $(A + B)$ (II. §. 71.);

9) $\gamma = (A + B + C) - 4R$, also $(A + B + C) - \gamma = 4R$, und die Summe dieser drei Winkel fällt in den fünften Quadranten, weßhalb (II. §. 82. c.)

Sin. γ = Sin. $(A + B + C)$, und

Cos. γ = Cos. $(A + B + C)$;

10) $\delta = 6R - (A + B + C + D)$, also $(A + B + C + D) + \delta = 6R$, und die Summe dieser vier Winkel fällt in sechsten Quadranten, weßhalb

Sin. δ = Sin. $(A + B + C + D)$, und

Cos. $\delta = -$ Cos. $(A + B + C + D)$;

11) $\varepsilon = 8R - (A + B + C + D + E)$, also $(A + B + C + D + E) + \varepsilon = 8R$, und die Summe dieser fünf Winkel fällt in achten Quadranten, weßhalb

Sin. $\varepsilon = -$ Sin. $(A + B + C + D + E)$, und

Cos. ε = Cos. $(A + B + C + D + E)$;

12) Die Dreiecke BAm, CBq, CDs, DEt und EpF sind rechtwinklicht, daher verhält sich (II. §. 104.), wenn man den Radius oder Sinus totus $= 1$ setzt (§. 3. Zus. VI.), und die Seiten der Figur auf die angezeigte Weise der Ordnung nach mit den kleinen Buchstaben bezeichnet (§. 3. Zus. V.),

AB : Bm = r : Sin. α, mithin nach Nro. 7.

a : Bm = 1 : Sin. A, und (Arithm. IV. §. 36.)

Bm = a $\times$ Sin. A = a . Sin. A; eben so

BC : Cq = r : Sin. β, also nach Nro. 8.

b : Cq = 1 : — Sin. (A + B), und
Cq = b × — Sin. (A + B) = — b . Sin. (A + B);
CD : Ds = r : Sin. γ, folglich nach Nro. 9.
c : Ds = 1 : Sin. (A + B + C), und
Ds = c . Sin. (A + B + C); ferner
DE : Dt = r : Sin. δ, daher nach Nro. 10.
d : Dt = 1 : Sin. (A + B + C + D), und
Dt = d . Sin. (A + B + C + D); endlich
EF : Ep = r : Sin. ε, weßhalb nach Nro. 11.
e : Ep = 1 : — Sin. (A + B + C + D + E), und
Ep = — e . Sin. (A + B + C + D + E).

13) Substituirt man anstatt der Perpendikel Bm, Cq, Ds, Dt und Ep die vorstehenden trigonometrischen Werthe, so findet man, daß die Ordinate für das Eck A = 0,
für B = Bm = a . Sin. A,
» C = Cn = Bm + Cq = a . Sin. A — b . Sin. (A + B),
» D = Do = Bm + Cq + Ds = a . Sin. A — b × Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C),
» E = Ep = Bm + Cq + Ds — Dt = a × Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D),
» F = 0 = Bm + Cq + Ds — Dt — Ep = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E) (Arithm. III. §. 45.).

14) Da die Dreiecke BAm, BCq ꝛc. rechtwinklicht sind, so verhält sich auch, wenn man jedesmal den Radius oder Sinus totus mit 1, und die Seiten wieder der Ordnung nach mit den Buchstaben a, b, c ꝛc. bezeichnet (II. §. 104.),
AB : Am = r : Cos. α, mithin nach Nro. 7.
a : Am = 1 : — Cos. A, und
Am = a × — Cos. A = — a . Cos. A; eben so
BC : Bq = r : Cos. β, also nach Nro. 8.
b : Bq = 1 : — Cos. (A + B), und
Bq = — b . Cos. (A + B); dann

$CD : Cs. = r : Cos. \gamma$, folglich nach Nro. 9.
$c : Cs = 1 : Cos. (A + B + C)$, und
$Cs = c . Cos. (A + B + C)$; ferner
$DE : Et = r : Cos. \delta$, daher nach Nro. 10.
$d : Et = 1 : - Cos. (A + B + C + D)$, und
$Et = - d . Cos. (A + B + C + D)$; endlich
$EF : Fp = r : Cos. \varepsilon$, weßhalb nach Nro. 11.
$e : Fp = 1 : Cos. (A + B + C + D + E)$, und
$Fp = e . Cos. (A + B + C + D + E)$.

15) Setzt man ebenfalls anstatt $- Am$, dann anstatt Bq, Cs, Et und Fp die vorstehenden trigonometrischen Werthe, so findet man, daß die Abszissen für das Eck

$A = 0$,
» » $B = - Am = -(- a . Cos. A) = a . Cos. A$,
» » $C = - Am + Bq = a . Cos. A + b \times - Cos. (A + B) = a . Cos. A - b . Cos. (A + B)$,
» » $D = - Am + Bq + Cs = a . Cos. A - b \times Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C)$,
» » $E = - Am + Bq + Cs + tE = a . Cos. A - b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) - d . Cos. (A + B + C + D)$,
» » $F = AF = f = - Am + Bq + Cs + tE + pF = a . Cos. A - b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) - d . Cos. (A + B + C + D) + e . Cos. (A + B + C + D + E)$.

Man findet also dem aufgestellten Lehrsatze gemäß für jedes Eck unter den gesetzten Bedingungen die entsprechende Ordinate und Abszisse. Das heißt, die Ordinaten sind

für $A = 0$,
» $B = a . Sin. A$,
» $C = a . Sin. A - b . Sin. (A + B)$,
» $D = a . Sin. A - b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C)$,
» $E = a . Sin. A - b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) - d . Sin. (A + B + C + D)$,
» $F = a . Sin. A - b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) - d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E)$;

und die Abszissen sind

für $A = 0$,

» $B = a \,.\, Cos.\, A$,

» $C = a \,.\, Cos.\, A - b \,.\, Cos.\,(A + B)$,

» $D = a \,.\, Cos.\, A - b \,.\, Cos.\,(A + B) + c \,.\, Cos.\,(A + B + C)$,

» $E = a \,.\, Cos.\, A - b \,.\, Cos.\,(A + B) + c \,.\, Cos.\,(A + B + C) - d \,.\, Cos.\,(A + B + C + D)$,

» $F = a \,.\, Cos.\, A - b \,.\, Cos.\,(A + B) + c \,.\, Cos.\,(A + B + C) - d \,.\, Cos.\,(A + B + C + D) + e \,.\, Cos.\,(A + B + C + D + E)$.

II. Beweis:

Wenn die Abszissenlinie eine Seite einer geradlinigten ebenen Figur ist, welche nebst hohlen Winkeln einen erhabenen Winkel hat.

Man nehme bei der Figur 5., welche bei C einen erhabenen Winkel hat, die Linie AF als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, dann bestimme man von allen Ecken aus die entsprechenden Ordinaten Bm, Cn, Do und Ep, und die Abszissen Am, An, Ao, Ap und AF; ferner ziehe man zur Bestimmung der Unterschiede der Ordinaten zu AF die Parallelen Cs, Cg und Eq, und man bezeichne die Winkel, welche diese mit den Polygonsseiten bilden, der Ordnung nach mit α, β, γ, δ und ε, so daß BAF oder $A = \alpha$, $BCs = \beta$, $DCg = \gamma$, $DEq = \delta$, und EFA oder $F = \varepsilon$.

Aus den vorhin angeführten Gründen ist

16) die Ordinate

für $A = 0$,

» $B = Bm$,

» $C = Cn = sm = Bm - Bs$,

» $D = Do = og + gD = Cn + Dg = Bm - Bs + Dg$,

» $E = Ep = qo = Do - Dq = Bm - Bs + D\,g - Dq$,

» $F = 0 = Ep - Ep = Ep - qo = Bm - Bs + Dg - Dq - Ep$.

17) Die Abszisse ist

für A = 0,
» B = Am,
» C = An = Am + mn = Am + sC,
» D = Ao = An + no = An + Cg = Am + sC + Cg,
» E = Ap = Ao + op = Ao + qE = Am + sC + Cg + qE,
» F = AF = f = Ap + pF = Am + sC + Cg + qE + pF.

18) Ferner ist

α = BAF = A,
β = R − sBC = R − (B − ABm) = R − B + ABm
= R − B + R − A = 2R − (A + B),
γ = C − nCg − nCs − β = C − R − R − β
= C − R − R − 2R + A + B = A + B
+ C − 4R,
δ = R − qDE = R − (D − CDg) = R − D + CDg
= R − D + R − γ = R − D + R − A − B
− C + 4R = 6R − (A + B + C + D),
ε = R − pEF = R − (E − R − δ) = R − E + R + δ
= R − E + R + 6R − (A + B + C + D)
= 8R − (A + B + C + D + E).

19) Daher ist

Sin. α = Sin. A, und *Cos.* α = *Cos.* A, indem α
= A (II. §. 62. und §. 67. Zus.),
dann β = 2R − (A + B), und (A + B) + β = 2R,
also Sin. β = Sin. (A + B), und *Cos.* β
= − *Cos.* (A + B),
γ = A + B + C − 4R, und (A + B + C) − γ = 4R,
also Sin. γ = Sin. (A + B + C), und
Cos. γ = *Cos.* (A + B + C),
δ = 6R − (A + B + C + D), und (A + B + C
+ D) + δ = 6R,
also Sin. δ = Sin. (A + B + C + D), und
Cos. δ = − Cos. (A + B + C + D),

$\varepsilon = 8R - (A + B + C + D + E)$, und $(A + B + C + D + E) + \varepsilon = 8R$,

also $\text{Sin. } \varepsilon = -\text{Sin.}(A + B + C + D + E)$, und

$\text{Cos. } \varepsilon = \text{Cos. } (A + B + C + D + E)$;

20) Die Dreiecke BAm, BsC, DCg, DEq, und EpF sind rechtwinklicht, deßhalb verhält sich

$AB : Bm = r : \text{Sin. } \alpha$, und

$a : Bm = 1 : \text{Sin. } A$, also

$Bm = a \times \text{Sin. } A = a \text{ . Sin. } A$;

$BC : Bs = r : \text{Sin. } \beta$, und

$b : Bs = 1 : \text{Sin. } (A + B)$, daher

$Bs = b \text{ . Sin. } (A + B)$;

$cD : Dg = r : \text{Sin. } \gamma$, und

$c : Dg = 1 : \text{Sin. } (A + B + C)$, mithin

$Dg = c \text{ . Sin. } (A + B + C)$;

$DE : Dq = r : \text{Sin. } \delta$, und

$d : Dq = 1 : \text{Sin. } (A + B + C + D)$, folglich

$Dq = d \text{ . Sin. } (A + B + C + D)$;

$EF : Ep = r : \text{Sin. } \varepsilon$, und

$e : Ep = 1 : -\text{Sin. } (A + B + C + D + E)$, somit

$Ep = -e \text{ . Sin. } (A + B + C + D + E)$.

21) Substituirt man diese Werthe, so findet man, daß die Ordinate

für $A = 0$,

» $B = Bm = a \text{ . Sin. } A$,

» $C = Cn = Bm - Bs = a \text{ . Sin. } A - b \text{ . Sin. } (A + B)$,

» $D = Do = Bm - Bs + Dg = a \text{ . Sin. } A - b \times \text{Sin. } (A + B) + c \text{ . Sin. } (A + B + C)$,

» $E = Ep = Bm - Bs + Dg - Dq = a \text{ . Sin. } A - b \text{ . Sin. } (A + B) + c \text{ . Sin. } (A + B + C) - d \text{ . Sin. } (A + B + C + D)$,

» $F = 0 = Ep - Ep = a \text{ . Sin. } A - b \text{ . Sin. } (A + B) + c \text{ . Sin. } (A + B + C) - d \text{ . Sin. } (A + B + C + D) + e \text{ . Sin. } (A + B + C + D + E)$.

22) Uiberdieß verhält sich

$AB : Am = r : \text{Cos. } \alpha$, und

$a : Am = 1 : \text{Cos. } A$, also

$Am = a \text{ . Cos. } A$;

$BC : Cs = r : \cos. \beta,$
$b : Cs = 1 : -\cos. (A + B)$, mithin
$Cs = -b . \cos. (A + B)$;

$CD : Cg = r : \cos. \gamma$, und
$c : Cg = 1 : \cos. (A + B + C)$, somit
$Cg = c . \cos. (A + B + C)$;

$DE : Eq = r : \cos. \delta$, und
$d : Eq = 1 : -\cos. (A + B + C + D)$, folglich
$Eq = -d . \cos. (A + B + C + D)$;

$EF : Fp = r : \cos. \varepsilon$, und
$e : pF = 1 : \cos. (A + B + C + D + E)$, daher
$pF = e . \cos. (A + B + C + D + E)$.

23) Substituirt man ebenfalls diese Werthe, so findet man, daß die Abszisse

für $A = 0$,
» $B = Am = a . \cos. A$,
» $C = An = Am + sC = a . \cos. A - b . \cos. (A + B)$,
» $D = Ao = Am + sC + Cg = a . \cos. A - b . \cos. (A + B) + c . \cos. (A + B + C)$,
» $E = Ap = Am + sC + Cg + qE = a . \cos. A - b \times \cos. (A + B) + c . \cos. (A + B + C) - d . \cos. (A + B + C + D)$;
» $F = AF = Am + sC + Cg + qE + pF = a . \cos. A - b . \cos. (A + B) + c \times \cos. (A + B + C) - d . \cos. (A + B + C + D) + e . \cos. (A + B + C + D + E)$.

Man findet also wieder unter den gesetzten Bedingungen dem aufgestellten Lehrsatze gemäß für jedes Eck die entsprechende Ordinate, und Abszisse; das heißt,

Die Ordinaten sind

$= a . \sin. A - b . \sin. (A + B) + c . \sin. (A + B + C) - d . \sin. (A + B + C + D) + \ldots\ldots;$

und die Abszissen sind

$= a . \cos. A - b . \cos. (A + B) + c . \cos. (A + B + C) - d . \cos. (A + B + C + D) + \ldots\ldots$

III. Beweis:

Wenn die Abszissenlinie eine Seite einer geradlinigten ebenen Figur ist, die nebst hohlen Winkeln mehrere erhabene Winkel hat.

Man nehme bei der Figur 6., welche nebst den hohlen Winkeln bei A, B, C, E, F, H und J bei D und G zwei erhabene Winkel hat, die Linie AJ als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, dann errichte man von allen Ecken aus die entsprechenden Ordinaten Bm, Cn, Dp, Eo, Fs, Gq und Hz, und die Abszissen Am, An, Ap, Ao, As, Aq, Az und AJ; ferner ziehe man zur Bestimmung der Unterschiede der Ordinaten zu AJ die Parallellinien Bt, Du, Ew, Gx und Hy, und man bezeichne die Winkel, welche diese mit den Polygonsseiten bilden, der Ordnung nach mit α, β, γ, δ, ε, μ, ν, φ; so daß $BAm = \alpha$, $CBt = \beta$, $CDu = \gamma$, $EDl = \delta$, $FEw = \varepsilon$, $FGx = \mu$, $GHy = \nu$, und $HJz = \varphi$.

Aus den angeführten Gründen ist

24) Die Ordinate

für $A = 0$,
» $B = Bm$,
» $C = Cn = nt + tC = Bm + tC$,
» $D = Dp = un = Cn - Cu = Bm + tC - Cu$,
» $E = Eo = ol + El = Dp + El = Bm + Ct - Cu + El$,
» $F = Fs = ws + Fw = Eo + Fw = Bm + Ct - Cu + El + Fw$,
» $G = Gq = xs = Fs - Fx = Bm + Ct - Cu + El + Fw - Fx$,
» $H = Hz = qy = Gq - qy = Gq - Gy = Bm + Ct - Cu + El + Fw - Fx - Gy$,
» $J = 0 = Hz - Hz = Bm + Ct - Cu + El + Fw - Fx - Gy - Hz$.

25) Die Abszisse ist

für $A = 0$,
» $B = - Am$,
» $C = An = - Am + mn = - Am + Bt$,

für $D = Ap = An + np = An + uD = -Am + Bt + uD$,

» $E = Ao = Ap - op = Ap - lD = -Am + Bt + uD - lD$,

» $F = As = Ao + os = Ao + Ew = -Am + Bt + uD - lD + Ew$,

» $G = Aq = As - qs = As - Gx = -Am + Bt + uD - lD + Ew - Gx$,

» $H = Az = Aq + qz = Aq + yH = -Am + Bt + uD - lD + Ew - Gx + yH$,

» $J = AJ = Az - Jz = -Am + Bt + uD - lD + Ew - Gx + yH - Jz$.

26) Ferner ist

$\alpha = 2R - A$;

$\beta = B - ABt = B - \alpha = B - 2R + A = A + B - 2R$;

$\gamma = R - uCD$, $uCD = C - BCt$, $BCt = R - \beta$,

$uCD = C - R + \beta$, $\gamma = R - C + R - \beta$

$= 2R - C - \beta = 2R - C - A - B + 2R$

$= 4R - (A + B + C)$;

$\delta = lDE = \gamma + CDE$, $CDE = 4R - D$,

$\delta = \gamma + 4R - D = 4R - A - B - C - D + 4R$

$= 8R - (A + B + C + D)$;

$\varepsilon = E - DEw = E - lDE = E - \delta = E - 8R + A + B + C + D = A + B + C + D + E - 8R$;

$\mu = FKw$, $FKw = \varepsilon + F$,

$\mu = A + B + C + D + E + F - 8R$;

$\nu = HGx$, $HGx = 4R - G - \mu$,

$\nu = 4R - G - \mu = 4R - G - A - B - C - D - E - F + 8R = 12R - (A + B + C + D + E + F + G)$;

$\varphi = yHJ$, $yHJ = H - \nu$,

$\varphi = H - \nu = H - 12R + A + B + C + D + E + F + G = A + B + C + D + E + F + G + H - 12R$.

27) Daher ist

$\alpha = 2R - A$, und $A + \alpha = 2R$,

also Sin. α = Sin. A, und Cos. α = − Cos. A;

$\beta = A + B - 2R$, und $(A + B) - \beta = 2R$,
also Sin. β = — Sin. $(A + B)$, und Cos. β
= — Cos. $(A + B)$;
$\gamma = 4R - (A + B + C)$, und $(A + B + C) + \gamma = 4R$,
also Sin. γ = — Sin. $(A + B + C)$, und Cos. γ
= Cos. $(A + B + C)$;
$\delta = 8R - (A + B + C + D)$, und $(A + B + C + D) + \delta = 8R$,
also Sin. δ = — Sin. $(A + B \ldots + D)$, und Cos. δ
= Cos. $(A \ldots + D)$;
$\varepsilon = A + B + C + D + E - 3R$, und $8R = (A \ldots + E) - \varepsilon$,
also Sin. ε = Sin. $(A \ldots + E)$, und Cos. ε
= Cos. $(A \ldots + E)$;
$\mu = A + B + C + D + E + F - 8R$, und $8R = (A + B + C + D + E + F) - \mu$,
also Sin. μ = Sin. $(A \ldots . + F)$, und Cos. μ
= Cos. $(A \ldots . + F)$;
$\nu = 12R - (A + B + C + D + E + F + G)$, und
$(A + B \ldots . + G) + \nu = 12R$,
also Sin. ν = — Sin. $(A \ldots . + G)$, und Cos. ν
= Cos. $(A \ldots . + G)$;
$\varphi = A + B + C + D + E + F + G + H - 12R$, und
$12R = (A \ldots . + H) - \varphi$,
also Sin. φ = Sin. $(A \ldots . + H)$, und Cos. φ
Cos. $(A \ldots . + H)$.

28) Die Dreiecke BAm, BtC, CDu, EDl, FEw, FGx, GHy und HJz sind rechtwinklicht, daher verhält sich

AB : Bm = r : Sin. α, und
a : Bm = 1 : Sin. A, also
Bm = a . Sin. A;
BC : Ct = r : Sin. β, also
b : Ct = 1 : Sin. β, und
Ct = b . Sin. β = — b . Sin. $(A + B)$;

CD : Cu = r : Sin. γ, also
c : Cu = 1 : Sin. γ, und
Cu = c . Sin. γ = — c . Sin. (A + B + C);
DE : El = r : Sin. δ, also
d : El = 1 : Sin. δ, und
El = d . Sin. δ = — d . Sin. (A + B + C + D);
EF : Fw = r : Sin. ε, also
e : Fw = 1 : Sin. ε, und
Fw = e . Sin. ε = e . Sin. (A . . . . + E);
GF : Fx = r : Sin. μ, also
f : Fx = 1 : Sin. μ, und
Fx = f . Sin. μ = f . Sin. (A . . . . + F);
GH : Gy = r : Sin. ν, also
g : Gy = 1 : Sin. ν, und
Gy = g . Sin. ν = — g . Sin. (A . . . . + G);
HJ : Hz = r . Sin. φ, also
h : Hz = 1 : Sin. (A . . . . + H), und
Hz = h . Sin. (A . . . . + H).

29) Substituirt man diese Werthe, so findet man, daß die Ordinate

für $A = 0$,
» B = a . Sin. A,
» C = a . Sin. A — b . Sin. (A + B),
» D = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c × Sin. (A + B + C),
» E = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c × Sin.(A+B+C)—d . Sin.(A+B+C+D),
» F = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A . . . D) + e × Sin. (A . . . . + E),
» G = a . Sin. A — b . Sin (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A . . . + D) + e × Sin.(A . . . . + E) — f . Sin.(A . . . . + F),
» H = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin.(A . . . . + D) + e × Sin.(A . . . . + E) — f . Sin.(A . . . . + F) + g . Sin. (A . . . . + G);

für $J = 0 = a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin.}(A + B) + c \cdot \text{Sin.}$
$(A + B + C) - d \cdot \text{Sin.}(A \ldots + D) + e$
$\times \text{Sin.}(A \ldots + E) - f \cdot \text{Sin.}(A \ldots . + F) + g$
$\times \text{Sin.}(A \ldots . + G) - h \cdot \text{Sin.}(A \ldots . + H).$

30) Uiberdieß verhält sich

$AB : Am = r : \text{Cos. } \alpha$, und
$a : Am = 1 : \text{Cos. } \alpha$, also
$Am = a \cdot \text{Cos. } \alpha = (a \times - \text{Cos. A}) = - a \cdot \text{Cos. A};$
$BC : Bt = r : \text{Cos. } \beta$, und
$b : Bt = 1 : \text{Cos. } \beta$, also
$Bt = b \cdot \text{Cos. } \beta = - b \cdot \text{Cos. } (A + B);$
$CD : Du = r : \text{Cos. } \gamma$, und
$c : Du = 1 : \text{Cos. } \gamma$, also
$Du = c \cdot \text{Cos. } \gamma = c \cdot \text{Cos. } (A + B + C);$
$DE : Dl = r : \text{Cos. } \delta$, und
$d : Dl = 1 : \text{Cos. } \delta$, also
$Dl = d \cdot \text{Cos. } \delta = d \cdot \text{Cos. } (A \ldots . + D);$
$EF : Ew = r : \text{Cos. } \varepsilon$, und
$e : Ew = 1 : \text{Cos. } \varepsilon$, also
$Ew = e \cdot \text{Cos. } \varepsilon = e \cdot \text{Cos. } (A \ldots . + E);$
$FG : Gx = r : \text{Cos. } \mu$, und
$f : Gx = 1 : \text{Cos. } \mu$, also
$Gx : = f \cdot \text{Cos. } \mu = f \cdot \text{Cos. } (A \ldots . + F);$
$GH : Hy = r : \text{Cos. } \nu$, und
$g : Hy = 1 : \text{Cos. } \nu$, also
$Hy = g \cdot \text{Cos. } \nu = g \cdot \text{Cos. } (A \ldots . + G);$
$HJ : Jz = r \cdot \text{Cos. } \varphi$, und
$h : Jz = 1 : \text{Cos. } \varphi$, also
$Jz = h \cdot \text{Cos. } \varphi = h \cdot \text{Cos. } (A \ldots . + H).$

31) Substituirt man ebenfalls diese Werthe, so findet man, daß die Abszisse

für $A = 0$,
» $B = - (a \times - \text{Cos. A}) = a \cdot \text{Cos. A}$,
» $C = a \cdot \text{Cos. A} - b \cdot \text{Cos. } (A + B)$,
» $D = a \cdot \text{Cos. A} - b \, (\text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos.}$
$(A + B + C)$,

für $E = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A \ldots + D)$,

» $F = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A \ldots + D) + e \cdot \text{Cos. } (A \ldots + E)$,

» $G = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A \ldots + D) + e \cdot \text{Cos. } (A \ldots + E) - f \cdot \text{Cos. } (A \ldots + F)$,

» $H = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A \ldots + D) + e \times \text{Cos. } (A \ldots + E) - f \cdot \text{Cos. } (A \ldots + F) + g \cdot \text{Cos. } (A \ldots + G)$,

» $J = AJ = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \times \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A \ldots + D) + e \cdot \text{Cos. } (A \ldots + E) - f \cdot \text{Cos. } (A \ldots + F) + g \cdot \text{Cos. } (A \ldots + G) - h \cdot \text{Cos. } (A \ldots + H)$.

Man findet also wieder unter den gesetzten Bedingungen dem aufgestellten Lehrsatze gemäß für jedes Eck die entsprechende Ordinate und Abszisse; das heißt, die Ordinaten sind

$= a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin. } (A + B) + c \cdot \text{Sin. } (A + B + C) - d \cdot \text{Sin. } (A \ldots + D) + \ldots\ldots;$

und die Abszissen sind

$= a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A \ldots + D) + \ldots\ldots$

Der aufgestellte Lehrsatz gilt demnach allgemein für alle geradlinigten ebenen Figuren; indem es nur solche Figuren gibt, die lauter hohle Winkel, oder nebst hohlen auch erhabene Winkel haben, und für diese beiden Fälle ist der Lehrsatz nach seinem ganzen Inhalte durch die angeführten Beweise als wahr erwiesen worden.

§. 5.

III. Lehrsatz:

Nimmt man bei einer gebrochenen geraden Linie in der nämlichen Ebene, in welcher sie liegt, eine gerade Linie als Abszissenlinie, und einen Ends-

punkt jener Linie als Anfangspunkt der letzteren an, so erhält man für jeden Scheitelpunkt der Winkel, welche die einzelnen Theile der gebrochenen Linie bilden, die entsprechende Ordinate, wenn man jede vom Anfangspunkte bis zum gegebenen Scheitelpunkte anliegende einzelne gerade Linie in den Sinus aller jener Winkel, welche jedesmal vom Anfangspunkte bis an diese Linie vorkommen, multiplizirt, und die einzelnen Produkte positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Anzahl der Winkel ungerade oder gerade ist; und die jedesmal entsprechende Abszisse erhält man, wenn man jede Seite auf die nämliche Weise in den Kosinus der genannten Winkel multiplizirt, und wieder die Produkte, welche die Winkel in einer geraden Anzahl enthalten, negativ, und die anderen Produkte positiv setzt. Das heißt, wenn man immerhin in der Formel so viele Glieder nimmt, als dem gegebenen Scheitelpunkte Winkel vorausgehen,

so sind (Fig. 7 und 8.) die Ordinaten

$$= a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin.}(A + B) + c \cdot \text{Sin.}(A + B + C) - d \cdot \text{Sin.}(A + B + C + D) + \ldots,$$

und die Abszissen sind

$$= a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos.}(A + B) + c \cdot \text{Cos.}(A + B + C) - d \cdot \text{Cos.}(A + B + C + D) + \ldots$$

I. Beweis:

Wenn die angenommene Abszissenlinie am Anfangspunkte die gebrochene gerade Linie unter einem bekannten Winkel berührt, ohne die letztere zu durchschneiden.

Man nehme bei Figur 7. die gerade Linie AG in der Ebene, in welcher die gebrochene Linie ganz liegt, als Abszissenlinie, und den Punkt A als Anfangspunkt unter dem Winkel A oder BAG an, welcher gegeben

ist, oder beliebig angenommen wird, somit für jeden Fall bekannt ist, und man errichte zu allen Scheitelpunkten die entsprechenden Ordinaten und Abszissen, somit die Ordinaten Bm, Cn, Do, Ep und Fq, und die Abszissen Am, An, Ao, Ap und Aq, und ziehe zugleich zu AG an den Punkten C und E die Parallelen Ch, Cs, Et und Eu, während man die einzelnen Theile der Ordnung nach mit a, b, c, d ꝛc., und dann die Winkel derselben mit A, B, C ꝛc., und die spitzigen Winkel, wie im vorigen §., mit den Buchstaben α, β, γ, δ und ε bezeichnet, so daß A oder BAG $= \alpha$, dann BCh $= \beta$, DCs $= \gamma$, DEt $= \delta$, und FEu $= \varepsilon$.

Aus den im vorigen §. angeführten Gründen ist

1) die Ordinate

für A = 0,
» B = Bm,
» C = Cn = Bm — Bh,
» D = Do = Ds + so = Cn + Ds = Bm — Bh + Ds,
» E = Ep = to = Do — Dt = Bm — Bh + Ds — Dt,
» F = Fq = qu + uF = Ep + Fu = Bm — Bh + Ds — Dt + Fu.

2) Die Abszisse ist

für A = 0,
» B = Am,
» C = An = Am + mn = Am + hC,
» D = Ao = An + no = An + Cs = Am + hC + Cs,
» E = Ap = Ao + op = Ao + tE = Am + hC + Cs + tE,
» F = Aq = Ap + pq = Ap + Eu = Am + hC + Cs + tE + Eu.

3) Ferner ist

α = BAG = A,
β = R — hBC = R — (B — ABm) = R — B + ABm
= R — B + R — A = 2R — (A + B),
γ = C — nCs — nCh — β = C — R — R — 2R + A + B
= A + B + C — 4R,

$\delta = R - tDE = R - (D - CDs = R - D + CDs$
$= R - D + R - \gamma = R - D + R - A - B$
$- C + 4R = 6R - (A + B + C + D)$,
$\varepsilon = E - pEu - pEt - \delta = E - R - R - 6R + A$
$+ B + C + D = A + B + C + D + E - 8R.$

4) Daher ist

Sin. α = Sin. A, und Cos. α = Cos. A, indem $\alpha = A$;

dann $\beta = 2R - (A + B)$, und $(A + B) + \beta = 2R$, also Sin. β = Sin. $(A + B)$, und Cos. $\beta = -$ Cos. $(A + B)$;

$\gamma = (A + B + C) - 4R$, und $(A + B + C) - \gamma = 4R$, also Sin. γ = Sin. $(A + B + C)$, und Cos. γ = Cos. $(A + B + C)$;

$\delta = 6R - (A + B + C + D)$, und $(A + B + C + D) + \delta = 6R$, also Sin. δ = Sin. $(A + B + C + D)$, und Cos. $\delta = -$ Cos. $(A + B + C + D)$;

$\varepsilon = A + B + C + D + E - 8R$, und $(A + B + C + D + E) - \varepsilon = 8R$, also Sin. ε = Sin. $(A + B + C + D + E)$, und Cos. ε = Cos. $(A + B + C + D + E)$.

5) Die Dreiecke ABm, BhC, CsD, DtE und FEu sind rechtwinklicht, deßhalb verhält sich

AB : Bm = r : Sin. α, und
a : Bm = 1 : Sin. A, also
Bm = a . Sin A;

BC : Bh = r : Sin. β, und
b : Bh = 1 : Sin. $(A + B)$, also
Bh = b . Sin. $(A + B)$;

CD : Ds = r : Sin. γ, und
c : Ds = 1 : Sin. $(A + B + C)$, also
Ds = c . Sin. $(A + B + C)$;

DE : Dt = r : Sin. δ, und
d : Dt = 1 : Sin. $(A + B + C + D)$, also
Dt = d . Sin. $(A + B + C + D)$;

EF : Fu = r : Sin. ε, und
e : Fu = 1 : Sin. (A + B + C + D + E), also
Fu = e . Sin. (A + B + C + D + E).

6) Substituirt man diese Werthe, so findet man, daß die Ordinate für
für A = 0,
» B = Bm = a . Sin. A,
» C = Cn = Bm — Bh = a . Sin. A — b . Sin. (A + B),
» D = Do = Bm — Bh + Ds = a . Sin. A — b × Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C),
» E = Ep = Bm — Bh + Ds — Dt = a Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D),
» F = Bm — Bh + Ds — Dt + Fu = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E).

7) Uiberdieß verhält sich
AB : Am = r : Cos. α, und
a : Am = 1 : Cos. A, also
Am = a . Cos. A;
BC : Ch = r . Cos. β, und
b : Ch = 1 : — Cos. (A + B), mithin
Ch = b × — Cos. (A + B) = — b . Cos. (A + B);
CD : Cs = r : Cos. γ, und
c : Cs = 1 : Cos. (A + B + C), folglich
Cs = c . Cos. (A + B + C);
DE : Et = r : Cos. δ, und
d : Et = 1 : — Cos. (A + B + C + D), daher
Et = — d . Cos. (A + B + C + D);
EF : Eu = r : Cos. ε, und
e : Eu = 1 : Cos. (A + B + C + D + E), weßhalb
Eu = e . Cos. (A + B + C + D + E).

8) Substituirt man ebenfalls diese Werthe, so findet man, daß die Abszisse
für A = 0,
» B = Am = a . Cos. A,
» C = An = Am + hC = a . Cos. A — b . Cos. (A + B),

für $D = Ao = Am + hC + Cs = a \cdot \text{Cos. } A - b \times \text{Cos. } (A + B) + c \cdot Cos. (A + B + C)$,
» $E = Ap = Am + hC + Cs + tE = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos.} (A + B) + c \cdot \text{Cos.} (A + B + C) - d \cdot Cos. (A + B + C + D)$,
» $F = Aq = Am + hC + Cs + tE + Eu = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos.} (A + B) + c \cdot \text{Cos.} (A + B + C) - d \cdot \text{Cos.} (A + B + C + D) + e \cdot \text{Cos.} (A + B + C + D + E)$.

II. Beweis:

Wenn die an einem Endspunkte der gebrochenen geraden Linie in der nämlichen Ebene angenommene Abszissenlinie diese letztere durchschneidet.

Man nehme (Fig. 8.) bei der gebrochenen Linie ABCDEF am Anfangspunkte A die Abszissenlinie AF an, welche jene in den Endspunkten A und F berührt, und in den Punkten n, p und s schneidet, dann ziehe man die entsprechenden Ordinaten und Abszissen, und zur Abszissenlinie an den Scheitelpunkten die erforderlichen Parallelen, während man die einzelnen Linien und Winkel auf die vorige Weise mit Buchstaben bezeichnet.

Aus den angeführten Gründen ist

9) Die Ordinate

für $A = 0$,
» $B = Bm$,
» $C = - Co = - mG = Bm - Bg$,
» $D = Dq = Dh - qh = Dh - Co = Dh + Bm - Bg = Bm - Bg + Dh$,
» $E = - Et = - qk = Dq - Dk = Bm - Bg + Dh - Dk$,
» $F = 0 = - Et + Et = Bm - Bg + Dh - Dk + Et$.

10) Die Abszisse ist

für $A = 0$,
» $B = Am$,
» $C = Ao = Am + mo = Am + gC$,
» $D = Aq = Ao + oq = Ao + Ch = Am + gC + Ch$,

für $E = At = Aq + qt = Aq + kE = Am + gC + Ch + kE$,

» $F = AF = At + tF = Am + gC + Ch + kE + tF$.

11) Ferner ist nach der vorigen Bezeichnung

$\alpha = A$,

$\beta = n$ (I. §. 41.) $= 2R - (A + B)$ (I. §. 43. Zuſ. I.),

$\gamma = C - gCh - \beta = C - 2R - 2R + A + B = A + B + C - 4R$ (I. §. 8. Zuſ. III),

$\delta = s = 2R - (D + p) = 2R - D - p = 2R - D - \gamma = 2R - D - A - B - C + 4R = 6R - (A + B + C + D)$;

$\varepsilon = z$ (I. §. 41.) $= E - KEU - \delta = E - 2R - 6R + (A + B + C + D) = A + B + C + D + E - 8R$.

12) Mithin ist

Sin. α = Sin. A, und Cos. α = Cos. A,

dann $\beta = 2R - (A + B)$, und $(A + B) + \beta = 2R$,

also Sin. β = Sin. $(A + B)$, und Cos. β = — Cos. $(A + B)$;

$\gamma = A + B + C - 4R$, und $(A + B + C) - \gamma = 4R$,

daher Sin. γ = Sin. $(A + B + C)$, und Cos. γ = Cos. $(A + B + C)$;

$\delta = 6R - (A + B + C + D)$, und $(A + B + C + D) + \delta = 6R$, folglich Sin. δ = Sin. $(A + B + C + D)$, und Cos. δ = — Cos. $(A + B + C + D)$;

$\varepsilon = A + B + C + D + E - 8R$, und $(A + B + C + D + E) - \varepsilon = 8R$, weßhalb Sin. ε = Sin. $(A + B + C + D + E)$, und Cos. ε = Cos. $(A + B + C + D + E)$.

13) Bei den rechtwinklichten Dreiecken BAm, BgC, DCh, DkE, und tEF verhält sich

BA : Bm = r : Sin. α, und

a : Bm = 1 : Sin. A, also

Bm = a . Sin. A;

BC : Bg = r : Sin. β, und

b : Bg = 1 : Sin. (A + B), daher
Bg = b . Sin. (A + B);
CD : Dh = r : Sin. γ, und
c : Dh = 1 : Sin. (A + B + C), mithin
Dh = c . Sin. (A + B + C);
DE : Dk = r : Sin. δ, und
d : Dk = 1 : Sin. (A + B + C + D), folglich
Dk = d . Sin. (A + B + C + D);
EF : Et = r : Sin. ε, und
e : Et = 1 : Sin. (A + B + C + D + E), weßhalb
Et = e . Sin. (A + B + C + D + E).

14) Substituirt man diese Werthe, so findet man, daß die Ordinate

für A = 0,
» B = Bm' = a . Sin. A,
» C = — Co = Bm — Bg = a . Sin. A — b × Sin. (A + B),
» D = Dq = Bm — Bg + Dh = a . Sin. A — b × Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C),
» E = — Et = Bm — Bg + Dh — Dk = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D),
» F = 0 = — Et + Et = Bm — Bg + Dh — Dk + Et = a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c × Sin. (A + B + C) + d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E).

15) Uiberdieß verhält sich

AB : Am = r : Cos. α, und
a : Am = 1 : Cos. A, also
Am = a . Cos. A;
BC : Cg = r : Cos. β, und
b : Cg = 1 : — Cos. (A + B), mithin
Cg = — b . Cos. (A + B);
CD : Ch = r : Cos. γ, und
c : Ch = 1 : Cos. (A + B + C), folglich
Ch = c . Cos. (A + B + C);
DE : Ek = r : Cos. δ, und
d : Ek = 1 : — Cos. (A + B + C + D), daher
Ek = — d . Cos. (A + B + C + D);

$EF : Ft = r : \text{Cos. } \varepsilon$, und
$e : tF = 1 : \text{Cos. } (A + B + C + D + E)$, also
$tF = e \text{ . Cos. } (A + B + C + D + E)$.

16) Substituirt man ebenfalls diese Werthe, so findet man, daß die Abszisse
für $A = 0$,
» $B = Am = a \text{ . Cos. } A$,
» $C = Ao = Am + gC = a \text{ . Cos. } A - b \text{ . Cos. } (A + B)$,
» $D = Aq = Am + gC + Ch = a \text{ . Cos. } A - b \times \text{Cos. } (A + B) + c \text{ . Cos. } (A + B + C)$,
» $E = At = Am + gC + Ch + kE = a \text{ . Cos. } A - b \text{ . Cos. } (A + B) + c \text{ . Cos. } (A + B + C) - d \text{ . Cos. } (A + B + C + D)$,
» $F = AF = Am + gC + Ch + kE + tF = a \text{ . Cos. } A - b \text{ . Cos. } (A + B) + c \text{ . Cos. } (A + B + C) - d \text{ . Cos. } (A + B + C + D) + e \text{ . Cos. } (A + B + C + D + E)$.

Man findet demnach in beiden Fällen, die in der nämlichen Ebene angenommene Abszissenlinie mag die gebrochene Linie durchschneiden, oder nicht, dem aufgestellten Lehrsatze gemäß die entsprechenden Ordinaten und Abszissen; das heißt, die Ordinaten sind
$= a \text{ . Sin. } A - b \text{ . Sin. } (A + B) + c \text{ . Sin. } (A + B + C) - d \text{ . Sin. } (A + B + C + D) + \ldots,$
und die Abszissen sind
$= a \text{ . Cos. } A - b \text{ . Cos. } (A + B) + c \text{ . Cos. } (A + B + C) - d \text{ . Cos. } (A + B + C + D) + \ldots\ldots$

Zusatz: Da die Beweise in diesem, und im vorigen §. für die geradlinigten ebenen Figuren, es mögen diese lauter hohle Winkel, oder nebst hohlen auch erhabene Winkel haben, und für gerad gebrochene, in der nämlichen Ebene liegende Linien geführt worden sind, es mag die in der nämlichen Ebene angenommene Abszissenlinie die letzteren durchschneiden, oder nicht, so gelten die für die Bestimmung der Ordinaten und Abszissen aufgestellten Lehrsätze allgemein für alle gerad gebrochenen, in der nämlichen Ebene liegenden Linien, es mögen diese eine Figur bilden, oder nicht, und von der in der nämlichen Ebene angenommenen Abszissenlinie durchschnitten werden, oder nicht.

Anmerkung: 1) Es ist am Bequemsten, wenn man bei den geradlinigten ebenen Figuren eine Seite als Abszissenlinie, und bei den gebrochenen Linien die letztere so annimmt, daß sie mit diesen allemal den Anfangspunkt gemein hat, wie dieses bei den bisherigen Beweisen in den angeführten Figuren der Fall gewesen ist.

2) Wenn man die für diesen Lehrsatz angeführten Beweise mit Rücksicht auf die als Beispiele angeführten Figuren betrachtet, so wird man finden, daß sich bei der Bestimmung der Ordinaten und Abszissen das Regelmäßige für die Abwechselung der Zeichen »+ und —« jedesmal aus der Beschaffenheit sowohl der Figuren, als auch der vorkommenden trigonometrischen Linien ergibt.

§. 6.

Folgerungen aus den vorstehenden, über die Bestimmung der Ordinaten und Abszissen aufgestellten Lehrsätzen.

1) Die beiden, in den §§. 4 und 5. vorgetragenen Lehrsätze lassen sich aus den nämlichen Gründen, welche in den beigefügten Beweisen angeführt worden sind, auf jede beliebige Anzahl von Seiten einer geradlinigten ebenen Figur, oder von Theilen einer gebrochenen Linie überhaupt erweitern, und einschränken, und immerhin, wenn man die entsprechenden Ordinaten und Abszissen bestimmt, nimmt man in den aufgestellten Formeln so viele Glieder, als jedesmal Winkel vorausgehen, somit beim ersten Ecke oder Scheitelpunkte, welcher der Anfangspunkt der Abszissenlinie ist, kein Glied, das ist, man setzt da die Abszissen und Ordinaten gleich Null, dann beim zweiten Ecke oder Scheitelpunkte ein Glied, beim dritten Ecke oder Scheitelpunkte zwei Glieder, beim vierten Ecke oder Scheitelpunkte drei Glieder ꝛc.; daher sind

α) beim Dreiecke die Ordinaten (Fig. 9.)

$= a \,.\, \mathit{Sin.}\, A - b \,.\, \mathit{Sin.}\, (A + B) = 0,$

und die Abszissen sind

$= a \,.\, \mathrm{Cos.}\, A - b \,.\, \mathrm{Cos.}\, (A + B = AC = c.$

Drückt man, wie es in der ebenen Trigonometrie ge-

schehen ist (II. §. 103. b.), die den Winkeln A, B und C opponirten Seiten mit a, b und c, also AB mit c, dann BC mit a, und AC mit b aus, so ist die Ordinate

für $C = 0 = c \cdot Sin. A - a \cdot Sin. (A + B)$,
und $a \cdot Sin. (A + B) = c \cdot Sin. A$, wie auch
$a \cdot Sin. C = c \cdot Sin. A$ (I. §. 43., und II. §. 64. d.),
weßhalb $a : c = Sin. A : Sin. C$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. VI.), das ist, im geradlinigten ebenen Dreiecke verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen entgegen stehenden Winkel (II. §. 112.).

β) Beim Vierecke sind die Ordinaten für die Abszissenlinie AD, und den Anfangspunkt A (Fig. 11)
$= a \cdot Sin. A - b \cdot Sin. (A + B) + c \cdot Sin. (A + B + C)$,
und die Abszissen sind
$= a \cdot Cos. A - b \cdot Cos. (A + B) + c \cdot Cos. (A + B + C)$.

γ) Bei einer geradlinigten ebenen Figur von 10 Seiten, und bei einer gebrochenen Linie überhaupt von 10 Theilen sind die Ordinaten, wenn man auf die angeführte Weise der Ordnung nach die Seiten und Winkel mit den kleinen und großen Buchstaben bezeichnet (Fig. 12.)

$= a \cdot Sin. A - b \cdot Sin. (A + B) + c \cdot Sin. (A + B + C)$
$- d \cdot Sin. (A + B + C + D) + e \cdot Sin. (A + B + C + D + E) - f \cdot Sin. (A + B + C + D + E + F) + g \times Sin. (A + B + C + D + E + F + G) - h \cdot Sin. (A + B + C + D + E + F + G + H) + i \cdot Sin. (A + B + C + D + E + F + G + H + J)$;

und die Abszissen erhält man nach eben dieser Formel, wenn man allemal den Kosinus anstatt des Sinus setzt.

2) Nimmt man bei den geradlinigten ebenen Figuren (Fig. 4 u. 5.), oder überhaupt bei der gebrochenen Linie (Fig. 8.) anstatt A den Punkt F als Anfangspunkt der Abszissenlinie FA, so sind die entsprechenden Ordinaten

$= e \cdot Sin. F - d \cdot Sin. (F + E) + c \cdot Sin. (F + E + D) - b \cdot Sin. (F + E + D + C) + a \cdot Sin. (F + E + D + C + B)$,

and die Abszissen sind

$= e \,.\, \text{Cos. } F - d \,.\, \text{Cos.}(F + E) + c \,.\, \text{Cos.}(F + E + D)$
$- b \,.\, \text{Cos.}(F + E + D + C) + a \,.\, \text{Cos.}(F + E + D + C + B).$

3) Für die Ordinate eines jeden Eckes oder Scheitelpunktes gibt es demnach bei der nämlichen Abszissenlinie zwei verschiedene Gleichungen, je nachdem der eine, oder der andere Endspunkt der Abszissenlinie als Anfangspunkt angenommen wird, und in eben dieser Hinsicht läßt sich auch die Abszissenlinie auf eine zweifache Art bestimmen.

4) Nimmt man (Fig. 4 und 5.) eine andere Abszissenlinie, etwa $BC = b$ an, so werden die beiden Gleichungen für die Ordinate eines jeden Eckes oder Scheitelpunktes auf die nämliche Weise bestimmt; so ist z. B. die Ordinate für das Eck oder den Scheitelpunkt E bei dem Anfangspunkte B

$= a \,.\, \textit{Sin.} B - f \,.\, \textit{Sin.}(B + A) + e \,.\, \textit{Sin.}(B + A + F)$,

und beim Anfangspunkte C ist dieselbe

$= c \,.\, \textit{Sin.}\, C - d \,.\, \textit{Sin.}\,(C + D)$;

und die Abszisse ist für den Anfangspunkt B

$= a \,.\, \text{Cos. } B - f \,.\, \text{Cos.}(B + A) + e \,.\, \text{Cos.}(B + A + F)$,

und für den Anfangspunkt C ist sie

$= e \,.\, \text{Cos. } C - d \,.\, \text{Cos. } (C + D)$.

5) Nimmt man in den angeführten Figuren die Seite $BC = b$ als Abszissenlinie an, so ist dieselbe, oder

$b = a \,.\, \text{Cos. } B - f \,.\, \text{Cos. } (B + A)$
$+ e \,.\, \text{Cos.}(B + A + F) - d \,.\, \text{Cos.}(B + A + F + E)$
$+ c \,.\, \text{Cos. } (B + A + F + E + D)$
$= c \,.\, \text{Cos. } C - d \,.\, \text{Cos.}(C + D) + e \,.\, \text{Cos.}(C + D + E)$
$- f \,.\, \text{Cos.}(C + D + E + F) + a \,.\, \text{Cos.}(C + D$
$+ E + F + A).$

6) Wenn man die für ein Eck oder einen Scheitelpunkt aus den zwei verschiedenen Anfangspunkten bestimmten Abszissen addirt, so gibt ihre Summe die ganze Abszissenlinie.

Daher ist z. B. (Fig. 4 und 5.), wenn man $AF = f$ als Abszissenlinie annimmt, für den Scheitelpunkt D aus A die Abszisse

$= AO = a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos. } (A + B) + c \,.\, \text{Cos.}$
$(A + B + C),$

und für den Anfangspunkt F ist sie
$= Fo = e \cdot \cos. F - d \cdot \cos. (F + E)$, folglich ist

$$AF = Ao + oF = f = a \cdot \cos. A - b \cdot \cos. (A + B) + c \cdot \cos. (A + B + C) + e \cdot \cos. F - d \times \cos. (F + E).$$

Anmerkung: Anstatt »Sin. (A + B + C + D), oder Cos. (A + B + C + D)« ꝛc. kann man der Kürze wegen auch schreiben »Sin.(A....+ D), oder Cos.(A....+ D)« ꝛc.; und anstatt »+« kommt auch das Zeichen »†« vor, welches ebenfalls als Additionszeichen zu betrachten ist.

II. Abschnitt.

Lehrsätze zur Bestimmung der Tangens, dann des Kosinus eines Winkels, und des Quadrates einer Seite einer gerad gebrochenen, in sich selbst zurück kehrenden Linie.

---

§. 7.

I. Lehrsatz:

Bei einer gebrochenen, in sich selbst zurück kehrenden Linie, von welcher alle Theile in der nämlichen Ebene sind, erhält man die Tangens eines Winkels, wenn man eine anliegende Seite zur Abszissenlinie, und das folgende Eck zum Anfangspunkte nimmt, dann für das vorhergehende Eck sowohl die entsprechende Ordinate als Abszisse sucht, und erstere durch die Differenz der Abszissenlinie und der gefundenen letzten Abszisse dividirt;

das ist (Fig. 4 und 5., und Fig. 8.),

$$\text{Tang. } A = [b \cdot Sin. B - c \cdot Sin. (B + C) + d \times Sin.(B + C + D) - e \cdot Sin.(B + C + D + E)] : [(a - b \cdot \cos. B + c \cdot \cos. (B + C) - d \cdot \cos. (B + C + D) + e \cdot \cos. (B + C + D + E)].$$

Beweis:

1) Man nehme die Seite AB = a zur Abszissenlinie, und bestimme für das vorausgehende Eck F die entsprechende Ordinate nach den beiden Anfangspunkten A und B.

Es ist bei A für F die Ordinate = f . Sin. A, und bei B ist sie = b . Sin. B — c . Sin. (B + C) + d . Sin. (B + C + D) — e . Sin. (B + C + D + E).

2) Diese zwei Werthe bezeichnen für das Eck die nämliche Ordinate, weßhalb sie einander gleich sind (§. 6. Nro. 3.), das heißt,

f . Sin. A = b . Sin. B — c . Sin. (B + C) + d Sin. (B + C + D) — e . Sin. (B + C + D + E).

3) Drückt man für das nämliche Eck F nach den beiden Anfangspunkten A und B die Abszissen aus, so geben diese zusammen die Abszissenlinie AB oder a (§. 6. Nro. 6.); weßhalb

a = f . Cos. A + b . Cos. B — c . Cos. (B + C) + d × Cos. (B + C + D) — e . Cos. (B + C + D + E).

4) In dieser Gleichung ist (Arithm. III. §. 98.)

f . Cos. A = a — b . Cos. B + c . Cos. (B + C) — d × Cos. (B + C + D) + e . Cos. (B + C + D + E).

5) Ferner ist, da hier der Radius gleich 1 gesetzt wird (§. 3. Zus. VI.), Tang. $A = \frac{Sin.\ A}{Cos.\ A}$ (II. §. 76.),

und Tang. $A = \frac{f\ .\ Sin.\ A}{f\ .\ Cos.\ A}$ (Arithm. III. §. 66. d.).

6) Setzt man endlich anstatt f . Sin. A, und f . Cos. A die bei Nro. 2 und 4. vorkommenden gleichen Werthe, so findet man nach dem aufgestellten Lehrsatze, daß bei einer gebrochenen, in der nämlichen Ebene liegenden und in sich selbst zurückkehrenden Linie die Tangens eines Winkels, oder

Tang. A = [b . Sin. B — c . Sin. (B + C) + d × Sin. (B + C + D) — e . Sin. (B + C + D + E)] : [a — b . Cos. B + c . Cos. (B + C) — d . Cos. (B + C + D) + e Cos. (B + C + D + E)].

I. Zusatz: Gegenwärtige Formel läßt sich aus den angeführten Gründen auf jede beliebige Anzahl der Seiten erweitern, oder beschränken.

II. Zusatz: Für einen anderen Winkel, etwa für D (Fig. 4.), ist die Tangens, wenn man deßhalb $DE = d$ zur Abszissenlinie annimmt, oder

$$\text{Tang. } D = [e \,.\, \mathit{Sin.}\, E - f \,.\, \mathit{Sin.}\, (E + F) + a \times \mathit{Sin.}\, (E + F + A) - b \,.\, \mathit{Sin.}\, (E + F + A + B)] : [(d - e \,.\, \text{Cos. } E + f \,.\, \text{Cos. } (E + F) - a \,.\, \text{Cos. } (E + F + A) + b \,.\, \text{Cos. } (E + F + A + B)].$$

III. Zusatz: Sucht man (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Tangens des Winkels A, und nimmt man deßhalb die Seite $AB = a$ zur Abszissenlinie an, so ist

$$\text{Tang. } A = \frac{b \,.\, \mathit{Sin.}\, B}{a - b \,.\, \text{Cos. } B}.$$

IV. Zusatz: Bezeichnet man, wie es bei der ebenen Trigonometrie der Fall gewesen ist (II. §. 103. b.), im Dreiecke die Winkel mit den größeren, und ihre opponirten Seiten mit den nämlichen kleineren Buchstaben, so wird

$$\text{Tang. } A = \frac{a \,.\, \mathit{Sin.}\, B}{c - a \,.\, \text{Cos. } B} = a \mathit{Sin.}\, B : (c - a \times \text{Cos. } B) \text{ (II. §. 113. Zus. V.).}$$

Anmerkung: Weil hier der Radius oder r gleich 1 gesetzt wird (§. 3. Zus. VI), so wäre, im Falle anstatt 1 wieder r gesetzt würde, z. B. die Tangens des Winkels C, oder $\text{Tang. } C = \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{br - c \,.\, \text{Cos. } A} \times r = c \times \text{Sin. } A \times r : (br - c \,.\, \text{Cos. } A) = c \,.\, \text{Sin. } A : \left(b - \frac{c \,.\, \text{Cos. } A}{r}\right)$.

§. 8.

II. Lehrsatz:

Man erhält den Kosinus eines Winkels einer gebrochenen, in sich zurückkehrenden und in der

nämlichen Ebene liegenden Linie, wenn man von der Summe der Quadrate der den Winkel einschließenden Seiten die Summe der Quadrate aller übrigen Seiten abzieht, und zum Reste die doppelten Produkte aller Paare eben dieser letzteren Seiten in den Kosinus der zwischen ihnen liegenden Winkel addirt, aber jene Produkte, wo die Winkel paarweise vorkommen, negativ, und die anderen positiv nimmt, und am Ende die ganze Summe mit dem doppelten Produkte der einschließenden Seiten dividirt;

das ist (Fig. 4 und 5., und Fig. 8.),

$$\text{Cos. } F = [e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab \text{ . Cos. } B - 2ac \text{ . Cos. } (B + C) + 2ad \text{ . Cos. } (B + C + D) + 2bc \text{ . Cos. } C - 2bd \text{ . Cos. } (C + D) + 2cd \times \text{Cos. } D] : 2ef.$$

Beweis:

1) Man nehme die Seite $AF = f$ als Abszissenlinie an, und drücke für das Eck E nach den beiden Anfangspunkten A und F die beiden Werthe der nämlichen Ordinate aus (§. 6. Nro. 3.); dieselben sind

$$e \text{ . } Sin. F = a \text{ . } Sin. A - b \text{ . } Sin. (A + B) + c \times Sin. (A + B + C) - d \text{ . } Sin. (A + B + C + D).$$

2) Man erhebe diese Gleichung zum Quadrate (Arithm. III. §. 70. I., und Arithm. IV. §. 1. Zus. II.), es ist

$$e^2 \text{ . } Sin. F^2 = a^2 \text{ . } Sin. A^2 - 2ab \text{ . } Sin. A \text{ . } Sin. (A + B) + b^2 \text{ . } Sin. (A + B)^2 + 2ac \text{ . } Sin. A \text{ , } Sin. (A + B + C) - 2bc \text{ . } Sin. (A + B) \text{ . } Sin. (A + B + C) + c^2 \times Sin. (A + B + C + D)^2 - 2ad \text{ . } Sin. A \text{ . } Sin. (A + B + C + D) + 2bd \text{ . } Sin. (A + B) \text{ . } Sin. (A + B + C + D) - 2cd \text{ . } Sin. (A + B + C) \text{ . } Sin. (A + B + C + D) + d^2 \text{ . } Sin. (A + B + C + D)^2.$$

3) Man drücke für das nämliche Eck E die bei-

den Abszissen aus, sie geben zusammen die ganze Abszissenlinie f oder AF (§. 6. Nro. 6.), weßhalb

$f = e \,.\, \text{Cos. } F + a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos. } (A + B) + c \,.\, \text{Cos.} (A + B + C) - d \,.\, \text{Cos.} (A + B + C + D)$;

4) Man setze das Glied $e \,.\, \text{Cos. } F$ auf die erste Seite herüber (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), und erhebe dann beide Seiten der Gleichung zum Quadrate; es ist

$f - e \,.\, \text{Cos. } F = a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos. } (A + B) + c \,.\, \text{Cos.} (A + B + C) - d \,.\, \text{Cos.} (A + B + C + D)$;

5) Daher ist (Arithm. IV. §. 1. Zus. II.)

$f^2 - 2ef \,.\, \text{Cos. } F + e^2 \,.\, \text{Cos. } F^2 = a^2 \,.\, \text{Cos. } A^2 - 2ab \times \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } (A + B) + b^2 \,.\, \text{Cos. } (A + B)^2 + 2ac \,.\, \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } (A + B + C) - 2bc \,.\, \text{Cos. } (A + B) \,.\, \text{Cos.} (A + B + C) + c^2 \,.\, \text{Cos.} (A + B + C)^2 - 2ad \,.\, \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } (A + B + C + D) + 2bd \times \text{Cos.} (A + B) \,.\, \text{Cos.} (A + B + C + D) - 2cd \times \text{Cos. } (A + B + C) \,.\, \text{Cos. } (A + B + C + D) + d^2 \,.\, \text{Cos. } (A + B + C + D)^2$;

6) Nun ist $\text{Sin. } A^2 + \text{Cos. } A^2 = r^2 = 1$, dann $\text{Sin.} (A + B)^2 + \text{Cos. } (A + B)^2 = r^2 = 1$, und so fortgesetzt (II. §. 70. Zus. I.);

7) Ferner ist $\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B) + \text{Cos. } A \times \text{Cos. } (A + B) = \text{Cos. } B$, dann $\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B + C) + \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } (A + B + C) = \text{Cos. } (B + C)$, u. s. f. (II. §. 86. Zus. II.);

8) Man addire beide Gleichungen bei Nro. 2 und Nro. 5. mit Rücksicht auf Nro. 6 und 7., es wird

$f^2 - 2ef \,.\, \text{Cos. } F + e^2 = a^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. } B + b^2 + 2ac \,.\, \text{Cos. } (B + C) - 2bc \,.\, \text{Cos. } C + c^2 - 2ad \times \text{Cos.} (B + C + D) + 2bd \,.\, \text{Cos.} (C + D) - 2cd \times \text{Cos. } D + d^2$;

9) Mithin ist nach dem aufgestellten Lehrsatze (Arithm. IV. §. 94.)

$$\text{Cos. } F = \big[e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab \times \text{Cos. } B - 2ac \,.\, \text{Cos. } (B + C) + 2ad \,.\, \text{Cos. } (B + C + D) + 2bc \,.\, \text{Cos. } C - 2bd \,.\, \text{Cos.} (C + D) + 2cd \,.\, \text{Cos. } D\big] : 2ef.$$

I. Zusatz: Vorstehende Formel läßt sich aus den

angeführten Gründen auf jede beliebige Anzahl der Seiten erweitern, oder abkürzen.

II. Zusatz: Bestimmt man (Fig. 9.) im Dreiecke ABC den Kosinus von A, so ist nach dem Lehrsatze (§. 3. Zus. V.)

$$\text{Cos. A} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

III. Zusatz: Bezeichnet man, wie in der ebenen Trigonometrie, die Seiten mit den kleineren Buchstaben, und die opponirten Winkel mit den nämlichen größeren Buchstaben, so ist

$$\text{Cos. A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times r$$

(II. §. 116.), wenn man nämlich anstatt 1 wieder den Halbmesser r setzt (§. 3. Zus. VI.).

§. 9.

III. Lehrsatz:

Man erhält das Quadrat einer Seite jeder gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden und in der nämlichen Ebene liegenden Linie, wenn man zur Summe der Quadrate aller übrigen Seiten die doppelten Produkte aller Paare dieser Seiten in den Kosinus der zwischen ihnen liegenden Winkel addirt, und jene Produkte, welche die Winkel in ungerader Anzahl enthalten, negativ, die übrigen aber positiv setzt;

das ist (Fig. 4 und 5., und Fig. 8.),

$$f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. B} + 2ac \times \text{Cos. (B + C)} - 2ad \,.\, \text{Cos. (B + C + D)} + 2ae \times \text{Cos. (B + C + D + E)} - 2bc \,.\, \text{Cos. } C + 2bd \times \text{Cos. (C + D)} - 2be \,.\, \text{Cos. (C + D + E)} - 2cd \times \text{Cos. D} + 2ce \,.\, \text{Cos. (D + E)} - 2de \,.\, \text{Cos. E.}$$

Der Beweis ist in der beigefügten, zu diesem §. gefertigten I. Tabelle enthalten.

I. Zusatz: Gegenwärtige Formel läßt sich eben-

falls aus den angeführten Gründen auf jede beliebige Anzahl der Seiten erweitern, oder beschränken.

II. Zusatz: Bestimmt man (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite AB = a, so ist nach dem Lehrsatze (§. 3. Zus. V.)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \text{Cos. } C.$$

III. Zusatz: Drückt man, wie in der Plantrigonometrie, wieder die Seiten mit den kleinen Buchstaben, und ihre opponirten Winkel mit den nämlichen großen Buchstaben aus, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. } C = a^2 + b^2 - \frac{2ab \,.\, \text{Cos. } C}{r}$$

(II. §. 115. Zus. I.), wenn man nämlich wieder den Halbmesser r anstatt 1 setzt.

IV. Zusatz: Die Formeln, welche durch die drei Lehrsätze dieses Abschnittes, und durch den II. und III. Lehrsatz des vorigen Abschnittes (§. 4 und 5., und §. 7 — 9.) aufgestellt und allgemein giltig erwiesen worden sind, setzen immer voraus, es sei der Halbmesser oder r = 1; deßwegen muß man bei Anwendung derselben von den Logarithmen trigonometrischer Linien, die man aus den logarithmisch-trigonometrischen Tabellen nimmt, die Zahl 10 als den Logarithmus des Radius abziehen (§. 3. Zus. VI.). Auf diese Weise ist z. B. Log. Sin. $24^0\ 30^1 = 9{,}6177270 - 10$.

V. Zusatz: Will man umgekehrt aus dem gefundenen Werthe einer trigonometrischen Linie, etwa aus dem Tangens oder aus dem Kosinus (§. 7 und 8.), vermittels der Tabellen den entsprechenden Winkel angeben, so muß man die Karakteristik um 10, somit um den Logarithmus des Radius, oder des Sinus totus vermehren (II. §. 93. Zus. II.).

VI. Zusatz: Aus eben diesen Gründen bleibt bei der dekadischen Ergänzung des Logarithmus einer trigonometrischen Linie am Ende der Subtrahend 10 weg, das heißt, es wird am Ende die Zahl 10 nicht abgezogen, also nicht mehr — 10 beigefügt.

Setzt man z. B. den Radius oder r = 1, so ist nach IV. Zusatze

Log. Sin. 24° 30′ = 9,6177270 — 10, mithin Compl. dec. Log. Sin. 24° 30′ = 10 — (9,6177270 — 10) — 10 = 10 — 9,6177270 + 10 — 10 = 10 — 9,6177270) = 0,3822730 (Arithm. III. §. 52.).

VII. Zusatz: Wenn bei den angeführten Formeln einzelne Glieder mit dem Zeichen „—“, also negativ vorkommen, so können sie nach der Beschaffenheit der genannten trigonometrischen Linien positiv, und positive Glieder in dieser Rücksicht negativ werden (Arithm. III. §. 56.). Bei der Rechnung mit Logarithmen werden, um die Produkte zu erhalten, nur die Logarithmen als Exponenten der Potenzen addirt (Arithm. IV. §. 56.). Haben demnach beide Faktoren gleiche Zeichen, so wird auch das Produkt positiv, und im entgegengesetzten Falle wird es negativ (Arithm. III. §. 56.).

Nur in diesem Sinne, und nicht nach den Regeln der Addition oder Subtraktion, sind die Zeichen „+ und —“ zu nehmen, wenn sie in der Folge den Logarithmen der Faktoren beigefügt sind (Arithm. III. §. 47 und 49.).

VIII. Zusatz: Aus den angeführten Gründen gelten die in diesem Abschnitte aufgestellten Lehrsätze auch von jenen gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linien, welche in der nämlichen Ebene liegen, und sich einmal, oder öfters durchschneiden.

Anmerkung: 1) Daß man z. B. bei a . Sin. A, oder a . Cos. A ꝛc. den Logarithmen dieser Ausdrücke noch »— 10« beifügt, begründet sich den angeführten Beweisen gemäß dadurch, daß der Radius oder Halbmesser gleich 1, und nicht gleich r gesetzt ist; in der letzteren Rücksicht hat man eigentlich $\frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{r}$, oder $\frac{a \,.\, \text{Cos. A}}{r}$ (§. 4 u. 5.) ꝛc., und es ist Log. $\frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{r} =$ Log. $\left(a \,.\, \frac{\text{Sin. A}}{r}\right) =$ Log. a + Log. Sin. A — Log. r = Log. a + Log. Sin. A — 10, dann Log. $\frac{a \,.\, \text{Cos. A}}{r}$ = Log. a + Log. Cos. A — 10 (Arithm. IV. §. 56 und 57.) ꝛc.; weßhalb z. B. Log. Sin. 24° 30′

$= 9{,}6177270 - 10$, und Log. Cos. $24° 30' = 9{,}9590229 - 10$ gesetzt wird.

2) Weil Tang. $A = \frac{r \cdot \text{Sin. } A}{\text{Cos. } A}$ (II. §. 76.), und

Cos. $A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot r$ (II. §. 116.) ꝛc., so muß man in diesen Formeln aus den angeführten Gründen bei der Logarithmen-Rechnung noch zum Zähler des Bruches die Zahl 10 addiren; es ist nämlich Log. Tang. $A =$ Log. Sin. $A +$ Log. $r -$ Log. Cos. $A =$ (Log. Sin. $A + 10$) $-$ Log. Cos. A, und

Log. Cos. $A =$ Log. $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) +$ Log. r

$=$ Log. $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) + 10$ (Arithm. IV. §. 56 und 57.) ꝛc.

III. Abschnitt.

Die Berechnung der Abszissen und Ordinaten, um aus den bekannten Seiten und Winkeln einer geradlinigten ebenen Figur, und aus den einzelnen Theilen und Winkeln einer gebrochenen Linie überhaupt diese letztere und die Figur in Grundriß zu legen, und den Flächeninhalt der Figur aus den Ordinaten und Abszissen zu bestimmen.

---

§. 10.

I. Aufgabe, eine geradlinigte ebene Figur in Grundriß zu legen, wenn von ihr alle Seiten und Winkel bekannt sind.

Auflösung:

1) Man nehme eine beliebige von den gegebenen Seiten als Abszissenlinie, und einen ihrer Endspunkte als Anfangspunkt der Abszissen an, und bezeichne von diesem letzteren aus die Winkel mit den großen

Buchstaben A, B, C, D ꝛc., und der Ordnung nach die anliegenden Seiten mit den kleinen Buchstaben a, b, c, d ꝛc. (§. 3. Zus. V.);

2) Man berechne nach §. 4. der Ordnung nach für alle Ecke die Abszissen, und die entsprechenden rechtwinklichten Ordinaten;

3) Man ziehe auf dem Papier eine gerade Linie von unbestimmter Größe, nehme diese als Abszissenlinie, und auf ihr einen beliebigen Punkt A als Anfangspunkt an;

4) Aus A trage man in der nämlichen Ebene im verjüngten Maaße mittels einer Skala der Ordnung nach auf der einen Seite dieser Linie die positiven Abszissen, und auf der entgegengesetzten Seite die negativen Abszissen auf (II. §. 138.);

5) Durch die Endspunkte der einzelnen Abszissen errichte man in eben dieser Ebene in der nämlichen Ordnung durch den verjüngten Maaßstabe Perpendikel in der Größe der berechneten Ordinaten; sind einige dieser letzteren negativ, so trage man sie auf der entgegengesetzten Seite der Abszissenlinie auf;

6) Endlich verbinde man der Ordnung nach die Endspunkte der Ordinaten durch gerade Linien, und man erhält den verlangten Grundriß der geradlinigten ebenen Figur.

Beweis:

1) Durch alle Seiten und Winkel ist die Figur vollkommen bestimmt oder gegeben (I. §. 54.), es kann also dieselbe aus diesen Stücken bestimmt oder berechnet werden (I. §. 6.);

2) Durch alle Abszissen und Ordinaten ist die Lage aller Ecke, und durch diese letztere die Figur selbst wieder vollkommen bestimmt (§. 3.);

3) Die berechneten Abszissen und Ordinaten werden im verjüngten Maaße den Abszissen und Ordinaten der gegebenen Figur proportionirt in der nämlichen Ordnung aufgetragen; dadurch erhält die auf dem Papier verzeichnete Figur die nämliche Anzahl der Seiten und die nämlichen Winkel, und die homo-

logen oder ähnlich liegenden Seiten sind mit den der gegebenen Figur gerade proportionirt, mithin ist die verzeichnete Figur der gegebenen ähnlich (I. §. 90. Zus. 1.), und man hat diese letztere in Grund, oder Grundriß gelegt (II. §. 137. c.).

Anmerkung: 1) Die Abszissen werden von einigen Geometern auch die Längen, und die Ordinaten die Breiten der Ecke, oder der Scheitelpunkte der Winkel genannt; und Abszissenlinie nennt man auch die Längenlinie (§. 3. Anmerk. 5.).

2) Auf eine ähnliche Weise nennen einige Geometer die Supplementswinkel 0° bis 90°, welche bei den Winkeln der Figuren, und bei den Summen derselben zum Aufschlagen der Logarithmen der trigonometrischen Linien bestimmt werden müssen, die reduzirten Winkel, und die vorkommenden Summen der Winkel die addirten Winkel.

3) Weil ich bei den bisherigen Beweisführungen, so wie bei der Aufstellung der angeführten Lehrsätze anstatt der äußeren, oder Nebenwinkel, die inneren vorkommenden Winkel der geradlinigten ebenen Figuren selbst genommen habe, so werde ich dieses in der Folge ebenfalls thun, und unter den Winkeln der Figuren immerhin diejenigen hohlen, oder erhabenen Winkel verstehen, welche auf der inneren Seite der Figur gebildet werden (§. 1. a.).

4) Wenn man bei der Vermessung der Winkel durchaus nur hohle Winkel mißt, so setzt man bei den erhabenen Bestimmungs-Winkeln den gemessenen korrespondirenden hohlen Winkeln auf die im II. Zusatze des §. 1. angezeigte Weise das Zeichen »—« vor.

§. 11.

I. Beispiel:

Man soll (Fig. 4.) das Sechseck ABCDEF mittels zu berechnender Abszissen und Ordinaten in Grundriß legen, wenn dasselbe lauter hohle Winkel hat, und diese letzteren und die Seiten folgende Größe haben:

Größe der Seiten { a = 114, b = 98,5, c = 55, d = 89, e = 100,85, f = 154;

Größe der Winkel { A = 112° 16', B = 107° 7', C = 148° 21', D = 112° 22', E = 162° 30', F = 77° 24'.

I. Auflösung:

1) Weil alle Seiten und Winkel der Figur gegeben sind, so geschieht, wenn man AF = f zur Abszissenlinie, und den Punkt A als Anfangspunkt nimmt, die Berechnung der Abszissen und Ordinaten nach den Formeln (§. 4.):

a . Cos. A — b . Cos.(A + B) + c . Cos.(A + B + C) ....
und a . Sin. A — b . Sin.(A + B) + c . Sin.(A + B + C) ....

2) Beim ersten Ecke A als dem Anfangspunkte ist die Ordinate und die Abszisse = 0.

3) Für das folgende Eck B ist die Abszisse — Am = a . Cos. A, und die entsprechende Ordinate Bm = a . Sin. A.

Nun ist a = 114, und A = 112° 16', mithin Cos. A = — Cos. 67° 44' (II. §. 69. Zus. und §. 71.), und Sin A = Sin. 67° 44' (II. §. 65 und 66.).

Ferner ist

Log. a = Log. 114 = 2,0569049,
Log. Cos. A = L. Cos. 67° 44' = 9,5785450 — 10,

---

also Log. (a . Cos. A) = 1,6354499 = Log. 43,2; und, weil der Kosinus des stumpfen Winkels negativ ist (II. §. 71. b.), die Abszisse — Am = — 43,2.

Uiberdieß ist

Log. a = Log. 114 = 2,0569049,
Log. Sin. A = Log. Sin. 67° 44' = 9,9663437 — 10

---

also Log. (a . Sin. A) = 2,0232486 = Log. 105,5; und die entsprechende Ordinate Bm ist = 105,5.

4) Für das Eck C ist die entsprechende Abszisse An = a . Cos. A — b . Cos. (A + B), und die Ordinate Cn = a . Sin. A — b . Sin. (A + B).

A + B = 112° 16' + 107° 7' = 219° 23', also
Cos.(A + B) = — Cos. 39° 23' } (II. §. 65 und 66., dann
Sin.(A + B) = — Sin. 39° 23' } §. 69. Zus., und §. 71.).

Log. b = Log. 98,5 = 1,9934362,
Log. Cos. (A + B) = 9,8881335 — 10,

---

also Log. (b . Cos.(A + B)) = 1,8815697 = Log. 76,1; und wegen des negativen Kosinus ist — b . Cos.(A + B)

=

$= -(-76{,}1) = 76{,}1$ (Arithm. III. §. 45. Lehrs. III.), weßhalb a . Cos. A — b . Cos. $(A + B) = -43{,}2 + 76{,}1 = 32{,}9$, und die Abszisse An ist $= 32{,}9$.

Uiberdieß ist

Log. b = Log. 98,5 = 1,9934362,
Log. Sin. $(A + B)$ = 9,8024355 — 10,

Log. b . Sin. $(A + B) = 1{,}7958717 =$ Log. 62,5, und wegen des negativen Sinus ist — b . Sin. $(A + B) = -(-62{,}5) = 62{,}5$, weßhalb a . Sin. A — b × Sin $(A + B = 105{,}5 + 62{,}5 = 168$, somit ist die Ordinate $Cn = 168$.

5) Für das Eck D ist die Abszisse Ao = a . Cos. A — b . Cos. $(A + B)$ + c . Cos. $(A + B + C)$, und die Ordinate Do ist

$= a$. Sin. A — b . Sin. $(A + B)$ + c . Sin. $(A + B + C)$.

$A + B + C = 219° 23' + 148° 21' = 367° 44'$, also Cos. $(A + B + C)$ = Cos. 7° 44', und

Sin. $(A + B + C)$ = Sin. 7° 44' (II. §. 82. c.).

Log. c = Log. 55 = 1,7403627,
Log. Cos. $(A + B +$ C) = 9,9960321 — 10,

Log. (c . Cos. $(A + B + C)) = 1{,}7363948 =$ Log. 54,5; und die Abszisse Ao ist $= 32{,}9 + 54{,}5 = 87{,}4$.

Uiberdieß ist

Log. c = Log. 55 = 1,7403627,
Log. Sin. $(A + B +$ C) = 9,1289247 — 10,

Log. (c . Sin. $(A + B + C)) = 0{,}8692374 =$ Log. 7,4; und die Ordinate Do ist $= 168 + 7{,}4 = 175{,}4$.

6) Für das Eck E ist die Abszisse Ap = a . Cos. A — b . Cos. $(A + B)$ + c . Cos. $(A + B + C)$ — d . Cos. $(A + B +$ C + D), und die entsprechende Ordinate Ep ist

$= a$. Sin. A — b . Sin. $(A + B)$ + c . Sin. $(A + B +$ C) — d . Sin. $(A + B +$ C + D).

$A + B +$ C + D $= 367° 44' + 112° 22' = 480° 6'$, mithin Cos. $(A + B +$ C + D) = — Cos. 59° 54', und Sin. $(A + B +$ C + D) = Sin. 59° 54'.

Ferner ist

Log. d = Log. 89 = 1,9493900,
Log. Cos. (A + B + C + D) = 9,7002802 — 10,

L. (d . Cos. (A + B + C + D)) = 1,6496702 = Log. 44,6; und die Abszisse Ap ist = 87,4 + 44,6 = 132, da der Faktor d, und der andere Faktor wegen des negativen Kosinus negativ, und deßwegen — (— 44,6) = 44,6 ist.

Uiberdieß ist

Log. d = Log. 89 = 1,9493900,
Log. Sin. (A + B + C + D) = 9,9370921 — 10,

L. (d . Sin. (A + B + C + D)) = 1,8864821 = Log. 77; und die Ordinate Ep ist = 175,4 — 77 = 98,4, indem das Produkt negativ ist.

7) Für das Eck F ist die Abszisse = AF = f
= a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) — d . Cos. (A + B + C + D) + e × Cos. (A + B + C + D + E),

und die Ordinate ist = 0
= a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D) + e × Sin. (A + B + C + D + E).

A + B + C + D + E = 480° 6' + 162° 30' = 642° 36', mithin Cos. (A + B + C + D + E) = Cos. 77° 24', und Sin. (A + B + C + D + E) = — Sin. 77° 24'.

Log. e = Log. 100,85 = 2,0036759,
Log. Cos. (A + B + C + D + E) = 9,3387418 — 10,

L. (e . Cos. (A + B + C + D + E)) = 1,3424177 = Log. 21,999; und die Abszisse AF = f ist = 132 + 21,999 = 153,999, somit beinahe = 154.

Uiberdieß ist

Log. e = Log. 100,85 = 2,0036759,
Log. Sin. (A + B + C + D + E) = 9,9894123 — 10,

L. (e . Sin. (A + B + C + D + E)) = 1,9930887 = Log. 98,421;

und die Ordinate für F = 0 ist
= 98,4 — 98,421 = — 0,021, somit beinahe = 0, da der Sinus des Winkels negativ, und deßhalb die gefundene Zahl 98,421 zu subtrahiren ist.

8) Hat man auf diese Weise alle Abszissen und Ordinaten berechnet, so trage man der Ordnung nach auf der Abszissenlinie vom angenommenen Anfangspunkte A an die gefundenen Abszissen — Am = — 43,2, dann An = 32,9, ferner Ao = 87,4, und Ap = 132, wie auch AF = f = 154, und ebenfalls die entsprechenden Ordinaten Bm = 105,5, dann Cn = 168, ferner Do = 175,4, und Ep = 98,4 auf; am Anfangspunkte A ist die Ordinate und die entsprechende Abszisse = 0, und am letzten Punkte F ist die Ordinate ebenfalls = 0.

9) Endlich verbinde man der Ordnung nach die Endspunkte der Ordinaten mit den geraden Linien *AB*, *BC*, CD, *DE* und EF, und man erhält den verlangten Grundriß des gegebenen Sechseckes *ABCDEF*.

10) Die Berechnung der Abszisse und Ordinate für das letzte Eck F wäre, um den Grundriß zu erhalten, nicht mehr nöthig gewesen. Es dient aber zur Probe, wenn man dieselben auch noch berechnet, da die letzte Abszisse für das Eck F der ganzen Abszissenlinie AF = f = 154, und die entsprechende letzte Ordinate = 0 werden soll.

Die am Ende sich ergebenden kleinen Differenzen 0,001, und 0,021 rühren, im Falle eine richtige Vermessung der gegebenen Stücke vorausgesetzt wird, von der Beschaffenheit der durch Annäherung bestimmten logarithmischen Zahlen her, und sind deßhalb kein Zeichen eines etwa in der Berechnung der Abszissen und Ordinaten begangenen Fehlers; wohl aber hätte man da gefehlt, wenn sich am Ende größere Differenzen ergeben würden.

II. Auflösung:

Da man aus den angeführten Lehrsätzen, und aus der vorstehenden ersten Auflösung das Verfahren und die Gründe dafür zureichend einsieht, so kann man auf nachstehende Weise die Abszissen und Ordinaten kürzer berechnen:

Die gegebenen Seiten und Winkel:

a = 114, A = 112° 16',
b = 98,5, B = 107° 7',
c = 55, C = 148° 21',
d = 89, D = 112° 22',
e = 100,85, E = 162° 30',
f = 154; F = 77° 24'.

Die Abszissen und Ordinaten werden auf folgende Weise nach den Formeln bestimmt:

a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) ....
a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) ....

1) Der Winkel A ist = 112° 16', sein Supplementswinkel ist = 67° 44', und die Seite a ist = 114, also Cos. A = — Cos. 67° 44', und Sin. A = Sin. 67° 44'; das Produkt a . Cos. A wird negativ, und das Produkt a . Sin. A wird positiv.

Log. 114 = 2,0569049,	Log. a = 2,0569049,
L. Cos. 67° 44' = 9,5785450 — 10,	L. Sin. 67° 44' = 9,9663437 — 10,
= 11,6354499 — 10	= 12,0232486 — 10
= 1,6354499 = Log. 43,2;	= 2,0232486 = Log. 105,5.

Erste Abszisse = — 43,2; erste Ordinate = 105,5.

2) Die Seite b ist = 98,5; und B = 107° 7', also A + B = 112° 16' + 107° 7' = 219° 23', dann Suppl. W. = 39° 23',
und Cos. (A + B) = — Cos. 39° 23', wie auch Sin. (A + B) = — Sin. 39° 23';
beide Produkte — b . Cos. (A + B), und — b . Sin. (A + B) werden positiv.

Log. 98,5 = 1,9934362,	Log. 98,5 = 1,9934362,
L. Cos. 39° 23' = 9,8881335 — 10,	L. Sin. 39° 23' = 9,8024355 — 10,
= 1,8815697	= 1,7958717
= Log. 76,1, also + 76,1;	= Log. 62,5, also + 62,5.

Zweite Abszisse = — 43,2 + 76,1 = 32,9;
zweite Ordinate = 105,5 + 62,5 = 168.

3) Es ist c = 55, und C = 148° 21', also (A + B) + C = 367° 44', dann Suppl. W. = 7° 44',
und Cos. (A + B + C) = Cos. 7° 44', wie auch Sin. (A + B + C) = Sin. 7° 44';
beide Produkte c . Cos. (A + B + C), und c . Sin. (A + B + C) sind positiv.

Log. 55 = 1,7403627,	Log. 55 = 1,7403627,
L. Cos. 7° 44′ = 9,9960321 — 10,	L. Sin. 7° 44′ = 9,1289247 — 10,
= 1,7363948	= 0,8692874
= Log. 54,5, also + 54,5;	= Log. 7,4, also + 7,4.

Dritte Abszisse = 32,9 + 54,5 = 87,4;
dritte Ordinate = 168 + 7,4 = 175,4.

4) Es ist d = 89, und D = 112° 22′, also (A + B + C) + D = 480° 6′, dann Suppl. W. = 59° 54′, und Cos. (A + B + C + D) = — Cos. 59° 54′, wie auch Sin. (A + B + C + D) = Sin. 59° 54′.

Das Produkt — d . Cos. (A + B + C + D) wird positiv, und — d . Sin. (A + B + C + D) wird negativ.

Log. 89 = 1,9493900,	Log. 89 = 1,9493900,
L. Cos. 59° 54′ = 9,7002802 — 10,	L. Sin. 59° 54′ = 9,9370921 — 10,
= 1,6496702	= 1,8864821
= Log. 44,6, also + 44,6;	= Log. 77, also — 77.

Vierte Abszisse = 87,4 + 44,6 = 132;
vierte Ordinate = 175,4 — 77 = 98,4.

5) Endlich ist e = 100,85, und E = 162° 30′, also (A + B + C + D) + E = 642° 36′, und Suppl. W. = 77° 24′, und Cos. (A + B + C + D + E) = Cos. 77° 24′, wie auch Sin. (A + B + C + D + E) = — Sin. 77° 24′.

Das Produkt e . Cos. (A + B + C + D + E) wird positiv, und e . Sin. (A + B + C + D + E) wird negativ.

Log. 100,85 = 2,0036759,	Log. 100,85 = 2,0036759,
L. Cos. 77° 24′ = 9,3387418 — 10,	L. Sin. 77° 24′ = 9,9894128 — 10,
= 1,3424177	= 1,9930887
= Log. 21,999, also + 21,999;	= Log. 98,421, also — 98,421.

Die fünfte Abszisse ist = 132 + 21,999 = 153,999, somit beinahe = 154; und die fünfte Ordinate ist = 98,4 — 98,421 = — 0,021, mithin beinahe = 0.

6) Hat man auf diese Weise alle Abszissen und Ordinaten berechnet, so verfahre man nach Nro. 8 und 9. der vorigen Auflösung, um aus denselben die Figur in Grundriß zu legen.

Anmerkung: 1) Wenn man (Fig. 4.) bei der nämlichen Abszissenlinie AF anstatt A den Anfangspunkt F nimmt, und der Ordnung nach für die Ecke E, D, C, B und A die Abszissen und Ordinaten berechnet, so erhält

man, da es für jede Ordinate bei der nämlichen Abszissenlinie zwei gleiche Werthe gibt (§. 6. Nro. 2 u. 3.), durch die Berechnung die Ordinaten Ep, Do, Cn und Bm, während man die Linien Fp, Fo, Fn, Fm und FA als Abszissen bekommt (§. 6. Nro. 2 u. 6.); und in diesem Falle müssen die Abszissen und Ordinaten vom Anfangspunkte F an von der rechten zur linken Seite aufgetragen werden, um den Grundriß der Figur zu erhalten.

2) Die Berechnung der Abszissen und Ordinaten geschieht nach den nämlichen Formeln, wenn man eine andere beliebige Abszissenlinie annimmt; nur müssen dann vom Anfangspunkte derselben aus die vorkommenden Buchstaben beibehalten (§. 3. Zus. V.), oder von diesem Punkte aus die Seiten und Winkel mit den Anfangsbuchstaben bezeichnet werden, damit man die Formeln der vorstehenden zwei Auflösungen, wie jene in dem Lehrsatze des §. 4. dargestellt sind, benützen kann.

3) Nach den im nämlichen §. 4. angeführten Gründen ist z. B. c . Sin. (A + B + C), oder c . Cos. (A + B + C) ein Produkt. Ist nun der vorkommende Sinus oder Kosinus von der Summe dieser drei Winkel positiv, so ist das Produkt auch positiv; ist aber der Sinus oder Kosinus negativ, so ist es das Produkt ebenfalls (Arithm. III. §. 56.).

4) Ist überdieß z. B. bei den Produkten — d . Sin. (A + B + C + D), oder — d . Cos. (A + B + C + D) der Sinus oder Kosinus von der Summe dieser vier Winkel positiv, so ist das ganze Produkt negativ; sind aber jene negativ, so wird dieses positiv; indem — (+ d . + Sin. (A + B + C + D)) = — d . Sin. (A + B + C + D), und eben so — (+ d . + Cos. (A + B + C + D)) = — d . Cos. (A + B + C + D), ferner — (+ d . — Sin. (A + B + C + D)) = — (— d . Sin. (A + B + C + D)) = + d . Sin. (A + B + C + D), und — (+ d . — Cos. (A + B + C + D)) = — (— d . Cos. (A + B + C + D)) = + d . Cos. (A + B + C + D) (Arithm. III. §. 45. Lehrs. II und III.).

5) Wie die Abszissen und Ordinaten zur stäten Uibersicht der vorgenommenen Arbeit bequem in einer tabellarischen Form berechnet werden können, werde ich späterhin zeigen.

6) Das hier von Nro. 1 — 5. Bemerkte gilt auch für die folgenden Berechnungen der Abszissen und Ordinaten sowohl bei geradlinigten ebenen Figuren mit erhabenen Winkeln, als auch bei den gerad gebrochenen Linien überhaupt.

§. 12.

II. Beispiel:

Man soll (Fig. 5.) ein Sechseck ABCDEF durch Abszissen und Ordinaten in Grundriß legen, wenn es nebst den hohlen Winkeln einen erhabenen Winkel hat, und alle Seiten und Winkel desselben bekannt sind:

1) a = 164, A = 54° 47';
2) b = 85,6, B = 97° 49':
3) c = 110,5, C = 259° 20';
4) d = 77, D = 94° 7';
5) e = 151, E = 147° 19';
6) f = 362,5; F = 66° 38'.

Auflösung:

Die Berechnung geschieht auf nachstehende Weise nach den Formeln, wo die Glieder bei ungerader Anzahl der Winkel positiv, und bei gerader negativ sind:

a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) ....
a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) ....

1) a = 164, und A = 54° 47', also Cos. A = Cos. 54° 47', und Sin. A = Sin. 54° 47'.

Beide Produkte a . Cos. A, und a . Sin. A sind positiv.

Log. 164 = 2,2148438,	Log. 164 = 2,2148438,
L. Cos. 54° 47' = 9,7609274 — 10,	L. Sin. 54° 47' = 9,9122099 — 10,
= 1,9757712	= 2,1270537
= Log. 94,57, also + 94,57;	= Log. 134, also + 134.

Erste Abszisse = 94,57; erste Ordinate = 134.

2) b = 85,6, und B = 97° 49', also A + B 152° 36', dann Suppl. W. = 27° 24', und Cos. (A + B) = — Cos. 27° 24', wie auch Sin. (A + B) = Sin. 27° 24'.

Das Produkt — b . Cos. A wird positiv, und — b . Sin. A wird negativ (§. 11. Anmerk 3 und 4.).

Log. 85,6 = 1,9324738,	Log. 85,6 = 1,9324738,
L. Cos. 27° 24' = 9,9483227 — 10,	L. Sin. 27° 24' = 9,6629464 — 10,
= 1,8807965	= 1,5954202
= Log. 75,99, also + 75,99;	= Log. 39,39, also — 39,39.
+ 94,57,	+ 134,
2te Abszisse = 170,56;	2te Ordinate = 94,61.

3) c = 110,5, und C = 259° 20', also (A + B) + C = 152° 36' + 259° 20' = 411° 56', dann Suppl. W. = 51° 56', und Cos. (A + B + C) = Cos. 51° 56', wie auch Sin. (A + B + C) = Sin. 51° 56'.

Beide Produkte werden positiv.

Log. 110,5 = 2,0433623,	Log. 110,5 = 2,0433623,
L.Cos. 51° 56' = 9,7899880 — 10,	L.Sin. 51° 56' = 9,8961369 — 10,
= 1,8333503	= 1,9394992
= Log. 68,13, also + 68,13;	= Log. 86,996, also + 86,996.
+ 170,56,	+ 94,61
3te Abszisse = 238,69;	3te Ordinate = 181,606.

4) d = 77, und D = 94° 7', also (A + B + C) + D = 411° 56' + 94° 7' = 506° 3', dann Suppl. W. = 33° 57', und Cos. (A + B + C + D) = — Cos. 33° 57', wie auch Sin. (A + B + C + D) = Sin. 33° 57'.

Das Produkt — d . Cos. (A + B + C + D) wird positiv, und — d . Sin. (A + B + C + D) wird negativ.

Log. 77 = 1,8864907,	Log. 77 = 1,8864907,
L.Cos. 33° 57' = 9,9188296 — 10,	L.Sin. 33° 57' = 9,7469992 — 10,
= 1,8053203	= 1,6334899
= Log. 63,874, also + 63,874,	= Log. 43,002, also — 43,000.
+ 238,69,	+ 181,606,
4te Abszisse = 302,564;	4te Ordinate = 138,604.

5) e = 151, und E = 147° 19', also (A + B + C + D) + E = 506° 3' + 147° 19' = 653° 22', dann Suppl. W. = 66° 38', und Cos. (A .... + E) = Cos. 66° 38', wie auch Sin. (A .... + E) = — 66° 38'

Das erste Produkt e . Cos. (A + B + C + D + E) wird positiv, und e . Sin. (A + B + C + D + E) wird negativ.

Log. 151 = 2,1789769,	Log. 151 = 2,1789769,
L.Cos. 66° 38' = 9,5983679 — 10,	L.Sin. 66° 38' = 9,9628358 — 10,
= 1,7773448	= 2,1418127
= Log. 59,888, also + 59,888,	= Log. 138,61, also — 138,61.
+ 302,564,	+ 138,604,
5te Abszisse = 362,452;	5te Ordinate — 0,006.

Die letzte Abszisse am Endspunkte F ist = 362,452, und die entsprechende letzte Ordinate ist = 0,006, so.

mit ist jene beinahe = 362,5, und diese ist beinahe = 0, weßhalb die vorgenommene Berechnung richtig ist.

6) Man trage im verjüngten Maaße die Seite $AF = f$ als Abszissenlinie, und aus dem Anfangspunkte A auf ihr die gefundenen Abszissen, welche alle positiv sind, auf; dann errichte man an ihren Endspunkten die entsprechenden rechtwinklichten Ordinaten, und verbinde die Endspunkte der letzteren durch gerade Linien, so erhält man den verlangten Grundriß des gegebenen Sechseckes, das einen erhabenen Winkel hat.

§. 13.

III. Beispiel:

Man soll (Fig. 12.) ein Zeheneck ABCDEFGHJK in Grundriß legen, wenn es nebst den hohlen Winkeln mehrere erhabene Winkel hat, und die Seiten und Winkel desselben folgende Größe haben:

1) a = 179,1, A = 83° 7′,
2) b = 149,6, B = 135° 29′,
3) c = 125,5, C = 194° 54′, anstatt — 165° 6′;
4) d = 63,9, D = 148° 27′,
5) e = 145, E = 220° 37′, anstatt — 139° 23;
6) f = 30,9, F = 129° 9′,
7) g = 279,6, G = 161° 8′,
8) h = 656,3, H = 129° 35′,
9) i = 458,8, J = 50° 15′,
10) k = 543; K = 187° 19′, anstatt — 172° 41′.

Auflösung:

Die Berechnung der Abszissen und Ordinaten geschieht nach folgenden Formeln, wo die Glieder bei ungerader Anzahl der Winkel positiv, und bei gerader Anzahl negativ sind:

a . *Cos.* A — b . *Cos.* (A + *B*) + c . Cos. (A + B + C) — d . Cos. (A + B + C + D) + e × Cos. (A + B + *C* + D + E) . . . . . ; und

a . *Sin.* A — b . *Sin.* (A + B) + c . *Sin.* (A + B

Das Produkt g . Cos. (*A* + B . . . . + G) wird positiv, und g . Sin. (A + B . . . . . + G) wird negativ.

Log. 279,6 = 2,4465372,	Log. 279,6 = 2,4465372,
L. Cos. 7° 9′ = 9,9966096 — 10,	L. Sin. 7° 9′ = 9,0950556 — 10,
= 2,4431468,	= 1,5415928
= Log. 277,42, also + 277,42,	= Log. 34,801, also — 34,801,
+ 369,651,	+ 530,8719,
7te Abszisse = 646,771;	7te Ordinate = 496,0709.

8) h = 656,3, und H = 129° 35′, also (A + B . . . . + H) = 1202° 26′, dann Suppl. W. zu 122° 26′ ist 57° 34′, und Cos. (A + B . . . . + H) = — *C*os. 57° 34′, wie auch *S*in. (A + B . . . . + H) = Sin. 57° 34′.

Das Produkt — h . Cos. (A + B . . . . + H) wird positiv, und — h . Sin. (A + B . . . . + H) wird negativ.

Log. 656,3 = 2,8171024,	Log. 656,3 = 2,8171024,
L. Cos. 57° 34′ = 9,7294223 — 10,	L. Sin. 57° 34′ = 9,9263507 — 19,
= 2,5465247	= 2,7434531
= Log. 351,98, also + 351,98,	= L. 553,93, also — 553,93,
+ 646,771,	+ 496,0709,
8te Abszisse = 998,751;	8te Ordinate = — 57,8591.

9) i = 458,8, und J = 50° 15′, also (A + B . . . . + H) + J = 1252° 41′, dann Suppl. W. zu 172° 41′ ist 7° 19′, und Cos. (A + B . . . . + J) = — 7° 19′, wie auch Sin. (A + *B* . . . . + J) = Sin. 7° 19′.

Das Produkt + i . Cos. (A + B . . . . + J) wird negativ, und i . Sin. (A + B . . . . + J) wird positiv.

Log: 458,8 = 2,6616234,	Log. 458,8 = 2,6616234,
L. Cos. 7° 19′ = 9,9964493 — 10,	L. Sin. 7° 19′ = 9,1050096 — 10,
= 2,6580727	= 1,7666330
= L. 455,07, also — 455,07,	= Log. 58,43, also + 58,43,
+ 998,751,	— 57,8591,
9te Abszisse = 543,681;	9te Ordinate = 0,5709.

10) Beim letzten Ecke K soll die Abszisse = AF = k = 543 sein, und die Ordinate ist = 0; es ist aber die berechnete neunte Abszisse = 543,681, und die neunte Ordinate ist = 0,5709, weßhalb bei

jener die Differenz 0,681, und bei dieser 0,5709 beträgt.

Die gefundenen Abszissen und Ordinaten sind daher:

1ste	Abszisse	Am	= 21,464;	1ste	Ordinate	Bm	= 177,81,
2te	»	An	= 138,374;	2te	»	Cn	= 271,142,
3te	»	Ao	= 213,025;	3te	»	Do	= 372,022,
4te	»	Ap	= 272,291;	4te	»	Ep	= 395,907,
5te	»	Aq	= 339,095;	5te	»	Fq	= 524,597,
6te	»	As	= 369,351;	6te	»	Gs	= 530,8719,
7te	»	At	= 646,771;	7te	»	Ht	= 496,0709,
8te	»	Au	= 998,751;	8te	»	Ju	= —57,8591,
9te	»	Ak	= 543,681;	9te	»		= 0,5709.

11) Man trage im verjüngten Maaße die Seite AK = k als Abszissenlinie, und aus dem Anfangspunkte *A*, wo die Abszisse und Ordinate = 0, auf derselben die gefundenen Abszissen auf, welche alle positiv sind, dann errichte man an ihren Endspunkten die berechneten positiven Ordinaten aufwärts, und die für das Eck J gefundene negative Ordinate = — 57,8591 abwärts, somit in entgegengesetzter Richtung, und verbinde die Endspunkte der Ordinaten durch gerade Linien, so erhält man den verlangten Grundriß des gegebenen Zeheneckes, welches bei *C*, E und K erhabene, oder einwärts gehende Winkel hat.

Anmerkung: Da bei geradlinigten ebenen Figuren die Berechnung der Abszissen und Ordinaten unmittelbar zur Verfertigung des Grundrisses derselben, und auch, wie man in der Folge sehen wird, zur Bestimmung des Flächeninhaltes dienet, und bei der Auflösung der polygonometrischen Aufgaben überhaupt die Berechnung der Abszissen und Ordinaten nach einer angenommenen Abszissenlinie, die von einigen auch Längenlinie genannt wird, öfters vorkommt, so werde ich spaterhin noch mehrere Figuren als Beispiele zur Uibung in solchen logarithmisch-trigonometrischen Berechnungen anführen, und dadurch Veranlassung geben, daß man sich vielfach mit einer Aufgabe beschäftiget, die sich bei der ersten Rechnung über die Richtigkeit der gefundenen Resultate selbst erprobt, und zugleich sehr große Vortheile dem Geometer gewährt, der aus den gemessenen Seiten und Winkeln die Figuren verzeichnen, und ihren Flächeninhalt bestimmen, oder bei ihnen einige Vertheilungen vornehmen soll.

$+ C) - d \cdot Sin. (A + B + C + D) + e \cdot Sin. (A + B + C + D + E) \ldots\ldots$

1) $a = 179{,}1$, und $A = 83^\circ 7'$, also $Cos. A = Cos. 83^\circ 7'$, und $Sin. A = Sin. 83^\circ 7'$,

Beide Produkte $a \cdot Cos. A$, und $a \cdot Sin. A$ sind positiv.

Log. 179,1 = 2,2530956,	Log. 179,1 = 2,2530956,
L. Cos. 83° 7' = 9,0786310 — 10,	L. Sin. 83° 7' = 9,9968584 — 10,
= 1,3317266	= 2,2499540
= Log. 21,464, also + 21,464;	= Log. 177,81, also + 177,81.

Erste Abszisse = + 21,464; erste Ordinate = + 177,81.

2) $b = 149{,}6$, und $B = 135^\circ 29'$, also $A + B = 218^\circ 36'$, dann Suppl. W. $= 38^\circ 36'$, und $Cos. (A + B) = - Cos. 38^\circ 36'$, wie auch $Sin. (A + B) = - Sin. 38^\circ 36'$.

Beide Produkte $- b \cdot Cos. (A + B)$, und $- b \times Sin. (A + B)$ werden positiv.

Log. 149,6 = 2,1749316,	Log. 149,6 = 2,1749316,
L. Cos. 38° 36' = 9,8929404 — 10,	L. Sin. 38° 36' = 9,7951008 — 10,
= 2,0678720	= 1,9700324
= Log. 116,91, also + 116,91,	= Log. 93,332, also + 93,332.
+ 21,464,	+ 177,81,
2te Abszisse = 138,374;	2te Ordinate = 271,142.

3) $c = 125{,}5$, und $C = 194^\circ 54'$, also $(A + B) + C = 413^\circ 30'$, dann Suppl. W. $= 53^\circ 30'$, und $Cos. (A + B + C) = Cos. 53^\circ 30'$, wie auch $Sin. (A + B + C) = Sin. 53^\circ 30'$.

Beide Produkte $c \cdot Cos. (A + B + C)$, und $c \cdot Sin. (A + B + C)$ werden positiv.

Log. 125,5 = 2,0986437,	Log. 125,5 = 2,0986437,
L. Cos. 53° 30' = 9,7743876 — 10,	L. Sin. 53° 30' = 9,9051787 — 10,
= 1,8730313	= 2,0038224
= Log. 74,651, also + 74,651,	= Log. 100,88, also + 100,88.
+ 138,374,	+ 271,142,
3te Abszisse = 213,025.	3te Ordinate = 372,022.

4) $d = 63{,}9$, und $D = 148^\circ 27'$, also $(A + B + C) + D = 561^\circ 57'$, dann Suppl. W. zu $201^\circ 57'$ ist $= 21^\circ 57'$, und $Cos. (A + B + C + D) = - Cos. 21^\circ 57'$, wie auch $Sin. (A + B + C + D) = - Sin. 21^\circ 57'$.

Beide Produkte — d . Cos. (A + B + C + D), und — d . Sin. (A + B + C + D) werden positiv.

Log. 63,9 = 1,8055009,	Log. 63,9 = 1,8055009,
L.Cos 21°57′ = 9,9673188 — 10,	L.Sin.21°57′ = 9,5726362 — 10,
= 1,7728197	= 1,3781371
= Log.59,266, also + 59,266,	= Log.23,885, also + 23,885,
+ 213,025,	+ 372,022,
4te Abszisse = 272,291;	4te Ordinate = 395,907.

5) e = 145, und E = 220° 37′, also (A + B + C + D) + E = 782° 34′, dann Suppl. W. = 62° 34,′ und Cos. (A + B + C + D + E) = Cos. 62° 34′, wie auch Sin.(A+B+C+D+E) = — Sin. 62° 34′.

Beide Produkte e . Cos. (A + B + C + D + E) und Sin. (A + B + C + D + E) werden positiv.

Log. 145 = 2,1613680,	Log. 145 = 2,1613680,
L.Cos.62°34′ = 9,6634335 — 10,	L.Sin.62°34′ = 9,9481916 — 10,
= 1,8248015	= 2,1095596
= Log.66,804, also + 66,804,	= Log.128,69, also + 128,69,
+ 272,291,	+ 395,907,
5te Abszisse = 339,095;	5te Ordinate = 524,597.

6) f = 30,9, und F = 129° 9′, also (A + B + C + D + E) + F = 911° 43′, dann Suppl. W. zu 191° 43′, ist = 11° 43′, und Cos. (A + B + C + D + E + F), oder kürzer Cos. (A + B . . . . + F) = — Cos. 11° 43′, wie auch Sin.(A + B + C + D + E + F), oder kürzer Sin.(A + B . . . . + F) = — Sin. 11° 43.

Beide Produkte — f . Cos.(A + B + ... + F), und — f . Sin.(A + B + ... + F) werden positiv.

Log. 30,9 = 1,4899585,	Log. 30,9 = 1,4899585,
L.Cos.11°43′ = 9,9908553 — 10,	L.Sin.11°45′ = 9,3076503 — 10,
= 1,4808138	= 0,7976088
= Log. 30,256, also + 30,256,	= Log. 6,2749, also + 6,2749,
+ 339,095,	+ 524,597,
6te Abszisse = 369,351;	6te Ordinate = 530,8719.

7) g = 279,6, und G = 161° 8′, also (A + B . . . . . + F) + G = 1072° 51′, dann Suppl. W. zu 352° 51′ ist 7° 9′, und Cos.(A + B . . . . + G) = Cos. 7° 9′, wie auch Sin. (A + B . . . . + G) = — Sin. 7° 9′.

§. 14.

II. Aufgabe, eine geradgebrochene, in der nämlichen Ebene liegende Linie, von welcher alle einzelnen geraden Linien, und derer Winkel gegeben sind, in Grundriß zu legen.

Auflösung:

1) Man ziehe durch den Anfangspunkt dieser Linie eine gerade Linie als Abszissenlinie unter einem beliebigen bekannten Winkel.

2) Man berechne für diese letztere vom Anfangspunkte aus für alle Ecke der Ordnung nach die Abszissen und Ordinaten.

3) Man trage dieselben im verjüngten Maaße in eben dieser Ordnung auf, und bestimme aus der Beschaffenheit der Zeichen + und — die Lage der Abszissen und Ordinaten.

4) Man verbinde endlich der Ordnung nach alle Endspunkte der Ordinaten durch gerade Linien, so erhält man den verlangten Grundriß der gebrochenen geraden Linie.

Beweis:

1) Durch alle Abszissen und Ordinaten wird die Lage aller Ecke der gebrochenen Linie bestimmt, welche in der nämlichen Ebene unter gewissen Winkeln aus verschiedenen geraden Linien zusammengesetzt ist.

2) Durch die Lage aller Ecke wird aber die Grösse und Lage aller einzelnen Theile der gebrochenen Linie, mithin diese letztere selbst vollkommen bestimmt (§. 3.).

§. 15.

I. Beispiel:

Man soll (Fig. 10.) die gebrochene Linie ABCDEF mittels zu berechnender Abszissen und Ordinaten in Grundriß legen, wenn am Anfangspunkte *A* die Abszissenlinie unter einem Winkel von 77° 24′ angenom-

men wird, und die einzelnen Theile und ihre Winkel folgende Größe haben:

Größe der einzelnen Theile { a = 100,85, b = 89, c = 55, d = 98,5 e = 114; }
Größe der Winkel { A = 77° 24′ der angenommene Winkel, B = 162° 30′, C = 112° 22′, D = 148° 21′, E = 107° 7′. }

Auflösung:

Die Berechnung geschieht nach den Formeln (§. 5.): a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) ...., und a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) ....

1) Es ist a = 100,85, und der angenommene Winkel, unter welchem die Abszissenlinie am Anfangspunkte A mit dem ersten Theile AB zusammentrifft, ist = 77° 24′, also Cos. A = Cos. 77° 24′, und Sin. A = Sin. 77° 24′, und beide Produkte a . Cos. A, und a . Sin. A sind positiv.

Log. 100,85 = 2,0036759,	Log. 100,85 = 2,0036759,
L. Cos. 77° 24′ = 9,3387418 — 10,	L. Sin. 77° 24′ = 9,9894128 — 10,
= 1,3424177	= 1,9930887
= Log. 21,999, also + 21,999;	= Log. 98,421, also + 98,421.

Erste Abszisse = 21,999; erste Ordinate = 98,421.

2) b = 89, und B = 162° 30′, also A + B = 239° 54′, dann Suppl. W. = 59° 54′, und Cos. (A + B) = — Cos. 59° 54′, wie auch Sin. (A + B) = — Sin. 59° 54′.

Beide Produkte — b . Cos. (A + B), und — b × Sin. (A + B) werden positiv.

Log. 89 = 1,9493900,	Log. 89 = 1,9493900,
L. Cos. 59° 54′ = 9,7002802 — 10,	L. Sin. 59° 54′ = 9,9370921 — 10,
= 1,6496702	= 1,8864821
= Log. 44,634, also + 44,634,	= Log. 76,999, also + 76,999,
+ 21,999,	+ 98,421,
2te Abszisse = 66,633;	2te Ordinate = 175,420.

3) c = 55, und C = 112° 22′, also (A + B) + C = 352° 16′, dann Suppl. W. = 7° 44′, und Cos. (A + B + C) = Cos. 7° 44′, wie auch Sin. (A + B + C) = — Sin. 7° 44′.

Das Produkt c . Cos. (A + B + C) wird positiv, und c . Sin. (A + B + C) wird negativ.

Log. 55 = 1,7403627,	Log. 55 = 1,7403627,
L.Cos. 7° 44′ = 9,9960321 — 10,	L.Sin. 7° 44′ = 9,1289247 — 10,
= 1,7363948	= 0,8692874
= Log. 54,499, also + 54,499,	= Log. 7,4009, also — 7,4009,
+ 66,633,	+ 175,420,
3te Abszisse = 121,132;	3te Ordinate = 168,0191.

4) d = 98,5, und D = 148° 21′, also (A + B + C) + D = 500° 37′, dann zu 140° 37′ ist der Suppl. W. = 39° 23′, und Cos. (A + B + C + D) = — Cos. 39° 23′, wie auch Sin. (A + B + C + D) = Sin. 39° 23′.

Das Produkt — d . Cos. (A + B + C + D) wird positiv, und — d . Sin. (A + B + C + D) wird negativ.

Log. 98,5 = 1,9934362,	Log. 98,5 = 1,9934362,
L.Cos. 39°23′ = 9,8881335 — 10,	L.Sin. 39°23′ = 9,8024355 — 10,
= 1,8815697	= 1,7958717
= Log. 75,957, also + 75,957,	= Log. 62,498, also — 62,498,
+ 121,132,	+ 168,0191,
4te Abszisse = 197,089;	4te Ordinate = 105,5211.

5) e = 114, und E = 107° 7′, also (A + B + C + D) + E = 607° 44′, dann zu 247° 44′ ist Suppl. W. = 67° 44′, und Cos. (A + B + C + D + E) = — Cos. 67° 44′, wie auch Sin. (A + B + C + D + E) = — Sin. 67° 44′.

Beide Produkte e . Cos. (A + B + C + D + E), und e . Sin. (A + B + C + D + E) werden negativ.

Log. 114 = 2,0569049,	Log. 114 = 2,0569049,
L.Cos. 67°44′ = 9,5785450 — 10,	L.Sin. 67°44′ = 9,9663437 — 10,
= 1,6354499	= 2,0232486
= Log. 43,196, also — 43,196,	= L. 105,49, also — 105,49,
+ 197,089,	+ 105,5211,
5te Abszisse = 153,893;	5te Ordinate = 0,0311.

6) Man trage (Fig. 10.) im verjüngten Maaße auf einer geraden Linie von einem angenommenen Anfangspunkte A aus der Ordnung nach die gefundenen Abszissen und Ordinaten mit Rücksicht auf ihre Zeichen zur Bestimmung der gehörigen Lage auf, und verbinde die Endspunkte der Ordinaten der Ordnung nach mit geraden Linien, so erhält man den verlangten Grundriß der geradgebrochenen Linie ABCDEF,

deren

deren einzelnen Theile und Winkel die angegebene Größe haben, und in der nämlichen Ebene liegen.

§. 16.

II. Beispiel:

Man soll (Fig. 8.) die gebrochene Linie ABCDEF mittels zu berechnender Abszissen und Ordinaten in Grundriß legen, wenn am Anfangspunkte die Abszissenlinie unter einem gegebenen, oder beliebig angenommenen Winkel von 71° 1′ mit dem ersten Theile der gebrochenen Linie zusammenstoßt, und die einzelnen Theile und ihre Winkel folgende Größe haben:

Größe der einzelnen Theile { a = 92, b = 182, c = 242, d = 290, e = 164; Größe der Winkel { A = 71° 1′ der angenommene Winkel, B = 43° 11′, C = 320° 8′, D = 34° 11′, E = 299° 13′.

Auflösung:

Die Berechnung geschieht nach den Formeln (§. 5.): a. Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos (A + B + C) ...., und a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) ....

1) Es ist a = 92, und der gegebene oder angenommene Winkel, unter welchem die Abszissenlinie mit dem ersten Theile AB zusammentrifft, ist = 71° 1′, also Cos. A = Cos. 71° 1′, und Sin. A = Sin. 71° 1′, und beide Produkte a . Cos. A, und a . Sin. A sind positiv.

Log. 92 = 1,9637878,	Log. 92 = 1,9637878,
L. Cos. 71° 1′ = 9,5122749 — 10,	L. Sin. 71° 1′ = 9,9757135 — 10,
= 1,4760627	= 1,9395013
= Log. 29,927, also + 29,927;	= Log. 86,997, also + 86,997.
Erste Abszisse = 29,927;	erste Ordinate = 86,997.

2) b = 182, und B = 43° 11′, also A + B = 71° 1′ + 43° 11′ = 114° 12′, dann Suppl. W. = 65° 48′, und Cos. (A + B) = — Cos. 65° 48′, wie auch Sin. (A + B) = Sin. 65° 48′.

Das Produkt — b . Cos. (A + B) wird positiv, und — b . Sin. (A + B) wird negativ.

Log. 182 = 2,2600714,	Log. 182 = 2,2600714,
L.Cos.65°48′ = 9,6127023 — 10,	L.Sin.65°48′ = 9,9600520 — 10,
= 1,8727737	= 2,2201234
= Log. 74,606, also + 74,606,	= Log. 166, also — 166,
+ 29,927,	+ 86,997,
2te Abszisse = 104,533;	2te Ordinate = 79,003.

3) c = 242, und $C = 320° 8'$, also $(A + B) + C = 114° 12' + 320° 8' = 434° 20'$, dann Suppl. W. $= 74° 20'$, und $\cos.(A + B + C) = \cos. 74° 20'$, wie auch $\sin.(A + B + C) = \sin. 74° 20'$.

Beide Produkte c . $\cos.(A + B + C)$, und c . $\sin.(A + B + C)$ werden positiv.

Log. 242 = 2,3838154,	Log. 242 = 2,3838154,
L.Cos.74°20′ = 9,4314286 — 10,	L.Sin.74°20′ = 9,9835582 — 10,
= 1,8152440	= 2,3673736
= Log. 65,35, also + 65,35,	= Log. 233,009, also + 233,009.
+ 104,533,	— 79,003,
3te Abszisse = 169,883;	3te Ordinate = 154,006.

4) d = 290, und $D = 34° 11'$, also $(A + B + C) + D = 434° 20' + 34° 11' = 468° 31'$, dann Suppl. W. zu $108° 31'$ ist $= 71° 29'$, und $\cos.(A + B + C + D) = -\cos. 71° 29'$, wie auch $\sin.(A + B + C + D) = \sin. 71° 29'$.

Das Produkt — d . $\cos.(A + B + C + D)$ wird positiv, und — d . $\sin.(A + B + C + D)$ wird negativ.

Log. 290 = 2,4623980,	Log. 290 = 2,4623980,
L.Cos 71°29′ = 9,5018538 — 10,	L.Sin.71°29′ = 9,9769143 — 10,
= 1,9642518	= 2,4393123
= Log.92,098, also + 92,098,	= Log.274,99, also — 274,99,
+ 169,883,	+ 154,006,
4te Abszisse = 261,981;	4te Ordinate = — 120,984.

5) e = 164, und $E = 299° 13'$, also $(A + B + C + D) + E = 468° 31' + 299° 13' = 767° 44'$, dann Suppl. W. ist $47° 44'$, und $\cos.(A + B + C + D + E) = \cos. 47° 44'$, wie auch $\sin.(A + B + C + D + E) = \sin. 47° 44'$.

Beide Produkte e . $\cos.(A + B + C + D + E)$ und e . $\sin.(A + B + C + D + E)$ werden positiv

Log. 164 = 2,2148438,	Log. 164 = 2,2148438,
L.Cos.47°44′ = 9,8277453 — 10,	L.Sin.47°44′ = 9,8692449 — 10,
= 2,0425891	= 2,0840887
= Log. 110,3, also + 110,3,	= Log.121,36, also + 121,36,
+ 261,981,	— 120,984,
5te Abszisse = 372,281;	5te Ordinate = 0,376.

6) Man trage (Fig. 8.) im verjüngten Maaße auf einer geraden Linie von einem angenommenen Anfangspunkte A aus der Ordnung nach die gefundenen Abszissen und Ordinaten mit Rücksicht auf ihre Zeichen zur Bestimmung der gehörigen Lage auf, und verbinde die Endspunkte der Ordinaten der Ordnung nach mit geraden Linien, so hat man den verlangten Grundriß der gebrochenen Linie ABCDEF, deren einzelnen Theile und Winkel die angegebene Größe haben.

§. 17.

III. Aufgabe, aus den berechneten Abszissen und Ordinaten den Flächeninhalt geradliniger ebener Figuren zu bestimmen.

Auflösung:

1) Da man nach der im §. 10. vorkommenden allgemeinen Auflösung der I. Aufgabe die geradlinigten ebenen Figuren mittels der aus den gegebenen Seiten und Winkeln berechneten Abszissen und Ordinaten in Grundriß legt, und durch diese die Lage aller Ecke, mithin dadurch die Figuren selbst vollkommen bestimmt sind (§. 3.), so ist auch ihr Flächeninhalt durch die Abszissen, und die entsprechenden rechtwinklichten Ordinaten gegeben.

2) Durch die Abszissen und ihre Ordinaten werden die Figuren in lauter Trapezen abgetheilt (I. §. 48. b.), indem die sich etwa am Anfange oder am Ende ergebenden Dreiecke auch als Trapezen betrachtet werden können, bei welchen die eine Parallele = 0 ist.

3) Durch die berechneten Ordinaten und Abszissen, wenn man bei den letzteren die gehörigen Differenzen

nimmt, sind in jedem einzelnen Trapeze die zwei Parallelen nebst ihrem Abstande oder der Höhe gegeben, und dadurch ist der Flächeninhalt jeder einzelnen Figur bestimmt (I. §. 157.).

4) Man berechne nach dem so eben aus dem I. Theile dieses Lehrbuches angeführten §. den Flächeninhalt eines jeden einzelnen Trapezes, und bringe alle Trapezen in eine Summe, diese gibt dann den Flächeninhalt der ganzen Figuren an.

5) Zeigt es sich nach dem negativen Werthe der Abszissen, oder nach der Konstruktion der Figur, daß berechnete Dreiecksebenen, oder Ebenen der Trapezen außerhalb der Figuren fallen, so müssen diese, als zum Flächeninhalte derselben nicht gehörig, vom ganzen Flächeninhalte wieder abgezogen werden.

Anmerkung: 1) Weil im ersten Theile dieses Lehrbuches beim Vortrage der Planimetrie schon gezeigt wurde, wie man den Flächeninhalt geradlinigter ebener Figuren findet, im Falle diese letzteren nach der Perpendikulär-Methode (II. §. 161. Anmerk. 2.) in Trapezen getheilt werden (I. §. 157 und 158. Aufl. II. und III.), und spaterhin noch die Aufgabe vorkommt, aus den Abszissen und Ordinaten den Flächeninhalt der Figuren zu finden, so führe ich hier zur Berechnung des Flächeninhaltes der Figuren aus den bekannten Ordinaten und Abszissen keine besonderen Beispiele mehr an.

2) Wie ohne vorherige Bestimmung der Abszissen und rechtwinklichten Ordinaten unmittelbar der Flächeninhalt der Figuren aus gegebenen Winkeln und Seiten gefunden werden kann, wird in den folgenden Hauptstücken gezeigt werden.

II. Hauptstück.

Bestimmung der Seiten, und Winkel geradliniger ebener Figuren.

I. Abschnitt.

Darstellung aller möglichen Aufgaben nebst Anführung der dabei vorkommenden besonderen Fälle.

§. 18.

Darstellung aller möglichen Aufgaben.

Da eine geradlinigte ebene Figur von n Seiten eben so viele Ecke oder Winkel (I. §. 12. Zus. II.), mithin 2n Stücke hat, von welchen 2n — 3 gegeben sein müssen, wenn die übrigen drei unbekannten Stücke, welche aber nicht lauter Seiten sein dürfen, daraus bestimmt werden sollen, so können die drei unbekannten Stücke, die man aus den übrigen gegebenen Stücken zu berechnen sucht, entweder zwei Seiten mit einem Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel, oder endlich drei Winkel sein.

§. 19.

Nähere Bestimmung der bei diesen Aufgaben vorkommenden besonderen Fälle.

a) Wenn zwei Seiten sammt einem Winkel unbekannt sind, so können die zwei unbekannten Seiten unmittelbar auf einander folgen, und den unbekannten Winkel einschließen, oder dieselben können unmittelbar auf einander folgen, ohne diesen Winkel einzuschließen, oder es können die zwei unbekannten Seiten nicht unmittelbar auf einander folgen.

b) Sind aber zwei Winkel nebst einer Seite unbekannt, so können die zwei unbekannten, unmittelbar auf einander folgenden Winkel an der unbekannten Seite anliegen, oder es können die Winkel unmittel-

bar auf einander folgen, ohne an der unbekannten Seite anzuliegen, oder es können die zwei unbekannten Winkel nicht unmittelbar auf einander folgen.

c) Wenn endlich drei Winkel unbekannt sind, so können die drei unbekannten Winkel entweder unmittelbar auf einander folgen, oder nicht.

II. Abschnitt.

Bestimmung zweier Seiten, und eines Winkels bei geradlinigten ebenen Figuren.

§. 20.

I. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur einen Winkel zu berechnen, wenn alle übrigen Winkel gegeben sind.

Auflösung:

1) Wenn die Figur n Seiten, und deßhalb auch n Ecke hat, so ist, es mögen lauter hohle Winkel, oder nebst hohlen auch erhabene Winkel vorkommen, die Summe aller inneren Winkel oder $S = 180°(n-2) = 2R(n-2)$, da R einen rechten Winkel bezeichnet (I. §. 53.);

2) Drückt s die Summe aller gegebenen oder bekannten Winkel, und x den unbekannten oder gesuchten Winkel aus, so ist

$$S = s + x = 2R(n-2), \text{ also}$$
$$x = S - s = 2R(n-2) - s.$$

§. 21.

Beispiele zur Berechnung eines unbekannten Winkels, wenn alle übrigen Winkel gegeben sind.

I. Beispiel:

1) Man soll (Fig. 4.) beim Sechsecke, dessen Winkel alle hohl sind, den Winkel F berechnen, im Falle die fünf übrigen Winkel folgende Größe haben:

A = 112° 16',
B = 107° 7',
C = 148° 21',
D = 112° 22',
E = 162° 30'.

Auflösung:

1) Man addire die fünf gegebenen Winkel, ihre Summe ist = 642° 36';

2) Man subtrahire diese Summe von der Summe aller sechs Winkel, welche = 2R(n — 2) = 180° × (6 — 2) = 180° × 4 = 720°;

3) Es ist der gesuchte Winkel x oder F = 720° — 642° 36' = 77° 24'.

II. Beispiel:

Man soll (Fig. 12.) im Zehenecke ABCDEFGHJK den erhabenen Winkel K berechnen, im Falle die übrigen neun Winkel folgende Größe haben:

A = 83° 7',
B = 135° 29',
C = 194° 54',
D = 148° 27',
E = 220° 37',
F = 129° 9',
G = 161° 8',
H = 129° 35',
J = 50° 15'.

Auflösung:

1) Man addire diese neun Winkel, ihre Summe ist = 1252° 41';

2) Man subtrahire diese Summe von der Summe aller gegebenen Winkel, welche = 2R(n — 2) = 180° × (10 — 2) = 180° × 8 = 1440°;

3) Es ist der gesuchte Winkel x oder K = 1440° — 1252° 41' = 187° 19'.

§. 22.

Einige Bestimmungen in Absicht auf Dreiecks- und Viereckswinkel.

a) Im geradlinigten ebenen Dreiecke betragen alle drei Winkel zusammen 180 Grad oder zwei rechte

Winkel, das ist (Fig. 9.), es ist $A + B + C = 180° = 2R$ (I. §. 43.).

Ist nun der Winkel *A* spitzig, so ist er zur Summe der beiden übrigen Winkel B + C der Supplements-Winkel (II. §. 64. d.), da $(B + C) + A = 180°$; weßhalb Sin. A = Sin. $(A + B)$ (II. §. 65 und 66.), und Cos. $A = -$ Cos. $(A + B)$ (II. §. 69. Zus., und §. 71.). Ist aber der Winkel A stumpf, so ist zu ihm die Summe $B + C$ das Supplement, und es ist dann Sin. $(B + C)$ = Sin. A, und Cos. $(B + C) = -$ Cos. A.

b) In jedem geradlinigten ebenen Vierecke ist die Summe der inneren Winkel = 360 Grad = 4R, daher hat jeder Winkel mit der Summe der übrigen einen gleichen, aber entgegengesetzten Sinus.

Ist (Fig. 11.) der Winkel *A* spitzig, so ist er zur Summe der übrigen drei Winkel der Supplements-Winkel, und es ist $(B + C + D) + A = 360°$, und daher Sin. $A = -$ Sin. $(A + B + C)$.

Ist dagegen der Winkel *A* stumpf, und sein Supplement = x, jenes von $A + B + C$ aber = y, so ist

$$A + x = 2R,$$

ferner

$$B + C + D - y = 2R,$$

also

$$A + B + C + D + x - y = 4R,$$

nun ist

$$A + B + C + D = 4R,$$

folglich ist

$$x - y = 0, \text{ und } x = y,$$

und es ist Sin. $A = -$ Sin. $(B + C + D)$.

Ist endlich der Winkel *A* erhaben, so hat er ebenfalls mit der Summe der drei übrigen Winkel, die zusammen einem hohlen Winkel gleich sind, gleiches Supplement; folglich ist wieder

$$-\text{Sin. A} = \text{Sin. } (B + C + D).$$

c) Aus den nämlichen Gründen hat jeder Winkel im Vierecke mit der Summe der drei übrigen Winkel gleichen Kosinus; das ist, Cos. A = Cos. $(B + C + D)$ (II. §. 69. und §. 71.).

d) Wenn das Viereck ein Trapez ist, so sind durch zwei Winkel, die an einer Parallele anliegen, die übrigen zwei Winkel auch gegeben. Denn wenn (Fig. 11.)

die Linie $AD \# BC$, so ist $A + B = 2R = C + D$ (I. §. 41.); weßhalb, wenn die Winkel A und D bekannt sind, $B = 2R - A$, und $C = 2R - D$.

Uiberdieß ist $Sin.(A + B) = Sin.(C + D) = 0$ (II. §. 66.), und $Cos.(A + B) = Cos.(C + D) = -r = -1$ (II. §. 71.), da der Radius oder $r = 1$ gesetzt wird (§. 3. Zus. VI.); ferner ist, weil sich die Winkel A und B, wie C und D, zu 180° ergänzen, $Sin.A = Sin.B$, und $Cos.A = -Cos.B$, wie auch $Sin.D = Sin.C$, und $Cos.D = -Cos.C$, im Falle A und D spitzige Winkel sind.

§. 23.

II. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur einen Winkel, und zwei unmittelbar auf einander folgende Seiten zu finden, wenn alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind.

Auflösung:

1) Man drücke den unbekannten Winkel durch x, und die gesuchten Seiten, welche unmittelbar auf einander folgen, durch y und z aus;

2) Man bestimme den Winkel x nach Vorschrift des §. 20., es ist, wenn S die Summe aller Winkel, und s die Summe der gegebenen Winkel bezeichnet, der gesuchte Winkel $x = S - s$;

3) Eine der unbekannten Seiten, etwa y, nehme man als Abszissenlinie, und einen ihrer Endspunkte als Anfangspunkt derselben an;

4) Man bestimme für den anderen Endspunkt der Abszissenlinie die Ordinate (§. 4.), welche $= 0$ ist (§. 3. Zus. IV.);

5) Man erhält eine Gleichung, in welcher nur die andere gesuchte Seite z als unbekannt vorkommt, und die somit bestimmt ist, und berechnet werden kann (Arithm. III. §. 98.);

6) Hat man die Seite z gefunden, so suche man bei der nämlichen Abszissenlinie und demselben Anfangspunkte die Abszisse für das am Endspunkte vor-

kommende Eck, es ist diese die angenommene Abszissenlinie selbst (§. 3. Zus. IV.), und deßhalb die gesuchte andere Seite y.

I. Zusatz: Da man bei einer geradlinigten ebenen Figur von wie immer vielen Seiten nach den aufgestellten und als allgemein giltig erwiesenen Formeln auf die angezeigte Weise die Abszissen und Ordinaten bestimmen kann, so gilt die vorstehende Auflösung für alle Figuren von wie immer vielen Seiten, und es lassen sich die vorkommenden Formeln für eine jede beliebige Anzahl von Seiten erweitern, und abkürzen.

II. Zusatz: Es seien z. B. bei einer geradlinigten ebenen Figur von sechs Seiten alle Winkel und alle Seiten, außer einem Winkel und zwei unmittelbar auf einander folgenden Seiten, gegeben, und man nehme im Sechsecke ABCDEF an (Fig. 4 und 5.), es seien nebst dem Winkel E auch die Seiten AF und EF, welche unmittelbar auf einander folgen, unbekannt, und dagegen alle übrigen Seiten und Winkel gegeben.

α) Nach §. 20. suche man den unbekannten Winkel x oder E, es ist $E = 2R(6 - 2) - (A + B + C + D + F)$;

β) Um die eine unbekannte Seite y oder EF, welche mit e bezeichnet wird, zu finden, nehme man AF als Abszissenlinie, und A zu ihrem Anfangspunkte, und bestimme die Ordinate für das Eck F, welche $= 0$ ist; es ist

$$a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin.}(A + B) + c \cdot \text{Sin.}(A + B + C) - d \cdot \text{Sin.}(A + B + C + D) + e \cdot \text{Sin.}(A + B + C + D + E) = 0,$$

und daher

$$e = [-a \cdot \text{Sin. } A + b \cdot \text{Sin.}(A + B) - c \times \text{Sin.}(A + B + C) + d \cdot \text{Sin.}(A + B + C + D)] : \text{Sin.}(A + B + C + D + E).$$

Durch diese Gleichung ist die eine unbekannte Seite e oder EF bestimmt.

γ) Um die andere unbekannte Seite AF oder f zu finden, suche man für die nämliche Abszissenlinie AF

und den Anfangspunkt A die Abszisse des vorausgehenden Eckes F, es ist

$$AF = f = a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos. } (A + B) + c \times \text{Cos. } (A + B + C) - d \,.\, \text{Cos. } (A + B + C + D) + e \,.\, \text{Cos. } (A + B + C + D + E).$$

Durch diese Gleichung ist, weil alles, außer f, gegeben ist, die andere unbekannte Seite AF oder f bestimmt.

III. Zusatz: Nimmt man (Fig. 4 und 5.) die nämliche Seite AF zur Abszissenlinie, aber F für ihren Anfangspunkt, und bestimmt man für das Eck A die Ordinate, so ist

$$e \,.\, \text{Sin. } F - d \,.\, \text{Sin. } (F + E) + c \,.\, \text{Sin. } (F + E + D) - b \,.\, \text{Sin. } (F + E + D + C) + a \,.\, \text{Sin. } (F + E + D + C + B) = 0,$$

und deßhalb

$$e = [d \,.\, \text{Sin. } (F + E) - c \,.\, \text{Sin. } (F + E + D) + b \,.\, \text{Sin. } (F + E + D + C) - a \,.\, \text{Sin. } (F + E + D + C + B)] : \text{Sin. } F.$$

Daraus findet man ebenfalls die eine unbekannte Seite e oder FE.

Für das Eck A ist die entsprechende Abszisse

$$FA = f = e \,.\, \text{Cos. } F - d \,.\, \text{Cos. } (F + E) + c \times \text{Cos. } (F + E + D) - b \,.\, \text{Cos. } (F + E + D + C) + a \text{ Cos. } (F + E + D + C + B).$$

Daraus läßt sich ebenfalls die andere unbekannte Seite f berechnen.

IV. Zusatz: Nimmt man (Fig. 4 und 5.) die Seiten $CD = c$ und $DE = d$, und den Winkel D als unbekannt an, so ist der gesuchte Winkel $D = 2R \times (6 - 2) - (A + B + C + E + F)$.

Ferner ist, wenn man die unbekannte Seite CD $= c$ als Abszissenlinie, und C als ihren Anfangspunkt nimmt,

$$d = [-b \,.\, \text{Sin. } C + a \,.\, \text{Sin. } (C + B) - f \,.\, \text{Sin. } (C + B + A) + e \,.\, \text{Sin. } (C + B + A + F)] : \text{Sin. } (C + B + A + F + E);$$

und die andere unbekannte Seite CD oder c ist

$$= b \,.\, \text{Cos. } C - a \,.\, \text{Cos. } (C + B) + f \,.\, \text{Cos. } (C + B$$

$+ A) - e . Cos.(C + B + A + F) + d . cos.(C + B + A + F + E)$.

Nimmt man aber für die Abszissenlinie $CD = c$ den Punkt D als Anfangspunkt, so ist

$$d = [e . Sin.(D + E) - f . Sin.(D + E + F) + a . Sin.(D + E + F + A) - b . Sin.(D + E + F + A + B)] : Sin. D;$$ und

$$c = d . Cos. D - e . cos.(D + E) + f . cos.(D + E + F) - a . cos.(D + E + F + A) + b . cos.(D + E + F + A + B).$$

V. Zusatz: Ist (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite AC oder c mit den zwei anliegenden Winkeln A und C gegeben, und sind die zwei Seiten AB und BC, oder a und b mit dem eingeschlossen Winkel B unbekannt, so ist der Winkel $B = 180° - (A + C)$ (I. §. 43. Zus. 1.), und es ist bei der Abszissenlinie AB oder a, und dem Anfangspunkte B die gesuchte Seite BC oder

$$b = \frac{c . Sin.(B + C)}{Sin. B},$$ und die andere Seite AB oder

$$a = b . cos. B - c . cos.(B + C).$$

Dagegen ist bei der nämlichen Abszissenlinie AB oder a, und bei dem Anfangspunkte A die Seite BC oder

$$b = \frac{c . Sin. A}{Sin.(A + C)},$$ und die andere Seite AB oder

$$a = c . cos. A - b . cos.(A + C).$$

VI. Zusatz: Bezeichnet man, wie in der Plantrigonometrie (II. §. 103. b.), die Seiten mit den kleineren Buchstaben ihrer opponirten Winkel, so ist, wenn (Fig. 9.) im Dreiecke ABC aus der Seite AC und den beiden Winkeln A und C die zwei anderen Seiten AB und BC mit dem Winkel B zu berechnen sind, und man AB oder die Seite c als Abszissenlinie, und den Punkt B als Anfangspunkt annimmt, die Seite BC oder

$$a = \frac{b . Sin.(B + C)}{Sin. B}$$ (II. §. 119.), und die andere Seite AB oder

$$c = a . cos. B - b . cos.(B + C).$$

Nimmt man aber bei der nämlichen Abszissenlinie AB oder c den Punkt A als Anfangspunkt, so ist die Seite BC oder

$$a = \frac{b \,.\, \text{Sin. A}}{\text{Sin. (A + C)}}$$ (II. §. 119.), und die andere Seite AB oder

$$c = b \,.\, \text{Cos. A} - a \,.\, \text{Cos. (A + C)}.$$

VII. Zusatz: Da man bei einer geradlinigten ebenen Figur, wenn alle Seiten und Winkel gegeben sind, außer einem Winkel und zwei unmittelbar auf einander folgenden Seiten, nach den angegebenen Lehrsätzen Gleichungen aufstellen kann, in welchen allemal nur ein unbekanntes Stück, der gesuchte Winkel, oder eine der gesuchten Seiten vorkommt, und in solchen einfachen Gleichungen die unbekannte Größe bestimmt ist (Arithm. III. §. 98.), so ist eine geradlinigte ebene Figur durch alle Seiten und Winkel, außer einem Winkel und zwei unmittelbar auf einander folgenden Seiten, bestimmt oder gegeben (I. §. 22, dann §. 47. a., und §. 54. a.).

§. 24.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 23.

Es sei (Fig. 4.) im Sechsecke ABCDEF aus den bekannten Winkeln *A*, B, C, D und E der Winkel F, und es seien aus den bekannten Seiten AB, BC, CD und DE die letzten zwei, unmittelbar auf einander folgenden Seiten EF und *A*F zu finden, und es haben die gegebenen Stücke folgende Größe:

Größe der Seiten.
$$\begin{cases} a = 114, \\ b = 98{,}5, \\ c = 55, \\ d = 89; \end{cases}$$

Größe der Winkel.
$$\begin{cases} A = 112^\circ\ 16', \\ B = 107^\circ\ 7', \\ C = 148^\circ\ 21', \\ D = 112^\circ\ 22', \\ E = 162^\circ\ 30'. \end{cases}$$

I. Auflösung:

1) Man berechne nach §. 20. aus den gegebenen Winkeln den unbekannten Winkel F, es ist $F = 2R$

$\times (n-2) - (A + B + C + D + E) = 180° \times 4 - 642° 36' = 720° - 642° 36' = 77° 24'$.

2) Man nehme die letzte unbekannte Seite AF oder f zur Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, so ist die andere unbekannte Seite EF oder (§. 23.)

$e = [-a \,.\, \text{Sin. } A + b \,.\, \text{Sin.}(A + B) - c \,.\, \text{Sin.}(A + B + C) + d \,.\, \text{Sin.}(A + B + C + D)] : \text{Sin.}(A + B + C + D + E)$.

3) Nun ist (§. 11.)

$-a \,.\, \text{Sin. } A$	$=+$	$\ldots\ldots -$	105,5,
$+b \,.\, \text{Sin.}(A+B)$	$=+$	$\ldots\ldots -$	62,498,
$-c \,.\, \text{Sin.}(A+B+C)$	$=+$	$\ldots\ldots -$	7,4,
$+d \,.\, \text{Sin.}(A+B+C+D)$	$=+$	$76{,}998 -$	$\ldots\ldots$

mithin bei Nro. 2. der Zähler $= +76{,}998 - 175{,}398. = -98{,}4$, folglich

$$e = \frac{-98{,}4}{-\text{Sin.}(A + B + C + D + E)}.$$

4) Die Summe der Winkel $(A + B + C + D + E)$ ist $= 642° 36'$, zieht man $360°$ davon ab (II. §. 82. c.), so erhält man $282° 36'$, und dazu ist das Supplement der Winkel von $77° 24'$, wobei aber der Sinus negativ, und der Kosinus positiv ist, das ist, $\text{Sin.}(A + B + C + D + E) = -\text{Sin. } 77° 24'$, und $\text{Cos.}(A + B + C + D + E) = +\text{Cos. } 77° 24'$; daher ist

$$e = \frac{-98{,}4}{-\text{Sin. } 77° 24'} = \frac{98{,}4}{\text{Sin. } 77° 24'} \text{ (Arithm. III. §. 57.).}$$

5) Nun ist

Log. 98,4	$=$	1,9929951,	
Log. Sin. $77° 24'$	$=$	9,9894128	$- 10,$
		$-$	$+$

also L. Sin. (98,4 ; Sin. $77° 24' = 11{,}9929951 - 9{,}9894128 = 2{,}0035823 = \text{Log. } 100{,}828 = \text{Log. } e$;

daher ist die gesuchte Seite $e = 100{,}828$.

6) Nach §. 23. ist die andere gesuchte Seite AF oder $f = a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos.}(A + B) + c \,.\, \text{Cos.}(A + B + C) - d \,.\, \text{Cos.}(A + B + C + D) + e \times \text{Cos.}(A + B + C + D + E)$.

Nun ist nach der I. Auflösung des

§. 11. Nr. 3. . . . . a . Cos. A = † . . . . . — 43,2,
» » » 4. . . . . — b . Cos.(A † B) = † 76,1,
» » » 5. . . . . † c . Cos.(A † B † C) = † 54,5,
» » » 6. . . . . — d . Cos.(A † B † C † D) = † 44,6,
» » » 7. . . . . † e . Cos.(A † B † C † D † E) = † 21,999,

folglich ist f = 197,199 — 43,2
= 153,999, somit beinahe = 154.

Der gesuchte Winkel F hat demnach 77° 24′, und und die unbekannte Seite EF oder e beträgt 100,828, und FA oder f beträgt 153,999, das heißt, es ist beinahe e = 100,83, und f = 154.

II. Auflösung:

1) Man suche auf die vorige Weise den Winkel F, es ist dieser wieder = 77° 24′ (§. 20.).

2) Man behalte die Seite AF oder f als Abszissenlinie, nehme aber F als Anfangspunkt, es ist (§. 23. Zus. III.)

$$e = [d \,.\, \text{Sin.}(F + E) - c \,.\, \text{Sin.}(F + E + D) + b \,.\, \text{Sin.}(F + E + D + C) - a \,.\, \text{Sin.}(F + E + D + C + B)] : \text{Sin. F, und}$$

$$f = e \,.\, \text{Cos. F} - d \,.\, \text{Cos.}(F + E) + c \,.\, \text{Cos.}(F + E + D) - b \,.\, \text{Cos.}(F + E + D + C) + a \times \text{Cos.}(F + E + D + C + B).$$

3) Nun ist der Winkel F = 77° 24′, und E = 162° 30′, also F + E = 239° 54′, zu diesem Winkel im dritten Quadranten ist das Supplement = 59° 54′ (II. §. 64.), und Sin.(F + E) = — Sin. 59° 54′, wie auch Cos.(F + E) = — Cos. 59° 54′.

4) Dann ist (F + E) + D = 239° 54′ + 112° 22′ = 352° 16′, zu diesem Winkel im vierten Quadranten ist das Supplement = 7° 44′, und Sin.(F + E + D) = — Sin. 7° 44′, wie auch Cos.(F + E + D) = Cos. 7° 44′.

5) Ferner ist (F + E + D) + C = 352° 16′ + 148° 21′ = 500° 37′, dazu, vielmehr zu 140° 37′, ist der Supplementswinkel = 39° 23′, und Sin.(F + E + D + C) = 39° 23′, wie auch Cos.(F + E + D + C) = — Cos. 39° 23′.

6) Endlich ist $(F+E+D+C)+B = 500° 37' + 107° 7' = 607° 44'$. Dazu, vielmehr zu $247° 44'$ ist das Supplement $= 67° 44'$, und $\text{Sin.}(F+E+D+C+B) = -\text{Sin.}\, 67° 44'$, wie auch $\text{Cos.}(F+E+D+C+B) = -\text{Cos.}\, 67° 44'$.

7) Nachdem man auf diese Weise für die Berechnung die Supplementswinkel gehörig bestimmt hat, suche man in den angeführten Formeln die Werthe der einzelnen Glieder; es ist

$$\begin{aligned} d.\text{Sin.}(F+E) &= + \ldots\ldots - 76{,}998, \\ -c.\text{Sin.}(F+E+D) &= + \;\; 7{,}4009 \\ +b.\text{Sin.}(F+E+D+C) &= + \;\; 62{,}498 \\ -a.\text{Sin.}(F+E+D+C+B) &= + 105{,}499 \end{aligned}$$

mithin ist für e der Dividend $= 175{,}3979 - 76{,}998 = 98{,}3999$, und es ist $e = \frac{98{,}3999}{\text{Sin. F}} = 100{,}83$.

8) Ferner ist

$$\begin{aligned} e.\text{Cos. F} &= + 22{,}008 \\ -d.\text{Cos.}(F+E) &= + 44{,}635 \\ +c.\text{Cos.}(F+E+D) &= + 54{,}462 \\ -b.\text{Cos.}(F+E+D+C) &= + 76{,}132 \\ +a.\text{Cos.}(F+E+D+C+B) &= + \ldots\ldots - 43{,}196, \end{aligned}$$

folglich ist die andere Seite $f = 197{,}237 - 43{,}196 = 154{,}041$, somit beinahe $= 154$.

§. 25.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 23.

Es seien (Fig. 13.) im Siebenecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel, außer dem Winkel D, und den beiden unmittelbar auf einander folgenden Seiten FG und GA gegeben, und man soll die unbekannten drei Stücke berechnen, im Falle die gegebenen Stücke folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten: $a = 531$, $b = 361$, $c = 383$, $d = 308$, $e = 400$;

Die bekannten Winkel: $A = 121° 13'$, $B = 113° 23'$, $C = 84° 44'$, $E = 105° 55'$, $F = 91° 37'$, $G = 112° 37'$.

Auf-

Auflösung:

1) Nach §. 20. berechne man aus den gegebenen Winkeln den unbekannten Winkel D, es ist $D = 2R \times (n-2) - (A + B + C + E + F + G) = 180° \times (7-2) - 629° 29' = 900° - 629° 29' = 270° 31'$;

2) Man nehme die letzte unbekannte Seite AG oder g als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, und bestimme für den Endspunkt G die Ordinate, welche $= 0$ ist (§. 3. Zus. I.), das heißt,

$0 = a \,.\, Sin.\, A - b \,.\, Sin.(A + B) + c \,.\, Sin.(A + B + C) - d \,.\, Sin.(A + B + C + D) + e \times Sin.(A + B + C + D + E) - f \,.\, Sin.(A + B + C + D + E + F)$;

3) In dieser Gleichung suche man f, es ist (Arithm. III. §. 98.)

$f = [a \,.\, Sin.\, A - b \,.\, Sin.(A + B) + c \,.\, Sin.(A + B + C) - d \,.\, Sin.(A + B + C + D) + e \times Sin.(A + B + C + D + E)] : Sin.(A + B + C + D + E + F)$;

4) Bei der nämlichen Abszissenlinie AG oder g, und bei dem Anfangspunkte *A* bestimme man, nachdem f gefunden sein wird, für den Endspunkt G die Abszisse, es ist AG oder

$g = a \,.\, Cos.\, A - b \,.\, Cos.(A + B) + c \,.\, Cos.(A + B + C) - d \,.\, Cos.(A + B + C + D) + e \times Cos.(A + B + C + D + E) - f \,.\, Cos.(A + B + C + D + E + F)$;

5) Wie bei der Berechnung der Abszissen und Ordinaten (§. 11. Auflös. II.), so berechne man auch hier die einzelnen Glieder dieser zwei Formeln der Kürze wegen zugleich; es ist, wenn man nach der Größe der Winkel auf die Zeichen des Sinus und Kosinus die geeignete Rücksicht nimmt, und zum Voraus bei einer ungeraden Anzahl von vorkommenden Winkeln die Produkte positiv, und bei einer geraden Anzahl negativ nimmt,

α) das erste Produkt ist positiv, A = 121° 13′,
der Sinus ist auch positiv, der Kosinus ist negativ.
Supplements-Winkel = 58° 47′;

L. a = L. 531 = 2,7250945,	Log. a = 2,7250945,
L. Sin. 58° 47′ = 9,9320746 − 10,	L. Cos. 58° 47′ = 9,7145609 − 10,
= 12,6571691 − 10	= 12,4396554 − 10
= 2,6571691 = Log. 454,118,	= 2,4396554 = Log. 275,204,
1tes Glied + 454,118;	1tes Glied − 275,204.

β) Produkt −, A + B = 234° 36′, Produkt −,
Sinus −; Suppl. W. = 54° 36′; Kosinus −;

L. b = L. 361 = 2,5575072,	Log. b = 2,5575072,
L. Sin. 54° 36′ = 9,9112257 − 10,	L. Cos. 54° 36, = 9,7628894 − 10,
= 2,4687329	= 2,3203966
= Log. 294,261,	= Log. 209,12,
2tes Glied + 294,261;	2tes Glied + 209,12.

γ) Produkt +, A + B + C = 319° 20′, Produkt +,
Sinus −; Suppl. W. = 40° 40′; Kosinus +;

L. c = L. 383 = 2,5831988,	Log. c = 2,5831988,
L. Sin. 40° 40′ = 9,8140192 − 10,	L. Cos. 40° 40′ = 9,8799034 − 10,
= 2,3972180	= 2,4631622
= Log. 249,585,	= Log. 290,511,
3tes Glied − 249,585;	3tes Glied + 290,511.

δ) Produkt −, A + B + C + D = 589° 51′, Produkt −,
Sinus −; Suppl. W. = 49° 51′; Kosinus −;

L. d = L. 308 = 2,4885507,	Log. d = 2,4885507,
L. Sin. 49° 51′ = 9,8832974 − 10,	L. Cos. 49° 51′ = 9,8094189 − 10,
= 2,3718481	= 2,2979696
= Log. 235,422,	= Log. 198,596,
4tes Glied + 235,422;	4tes Glied + 198,596.

ε) Produkt +, A + B ... + E = 695° 46′, Produkt +,
Sinus −; Suppl. W. = 24° 14′; Kosinus +;

L. e = L. 400 = 2,6020600,	Log. e = 2,6020600,
L. Sin. 24° 14′ = 9,6132641 − 10,	L. Cos. 24° 14′ = 9,9599384 − 10,
= 2,2153241	= 2,5619984
= Log. 164,181,	= Log. 364,753,
5tes Glied − 164,181;	5tes Glied + 364,753.

6) Man bringe, um die Seite f zu finden, die durch Hilfe der Sinus zur linken Seite gefundenen 5 Glieder in eine Summe; es ist

1tes Glied = + 454,118
2tes » = + 294,261
3tes » = ... — 249,585
4tes » = + 235,422
5tes » = ... — 164,181

= 983,801 — 413,766
= 570,035.

Ferner ist A + B + C + D + E + F = 787° 23',
und Sin. (A + B + C + D + E + F) = Sin 67° 23',
wie auch Cos. (A + B + C + D + E + F) = Cos. 67° 23';
deßhalb ist

$$f = \frac{570{,}035}{\text{Sin. (A + B + C + D + E + F)}} = \frac{570{,}035}{\text{Sin. } 67° 23'}.$$

Nun ist Log. 570,035 = 2,7559015,
und Log. Sin. 67° 23' = 9,9652480 — 10,

also Log. f = 2,7906535
= Log. 617,524, und es ist die Seite f = 617,524.

7) Um endlich auch die Seite AG oder g zu finden, bestimme man zu der bei Nro. 4. angeführten Formel noch das letzte Glied, welches = — f . Cos. (A + B + C + D + E + F); es ist

Log. f = Log. 617,524 = 2,7906535,
dann Log. Cos. (A + B + C . . . + F) = 9,5849685 — 10,

= 2,3756220
= Log. 237,477, und es ist, da zum Voraus das Produkt negativ, der Kosinus aber positiv ist, das letzte oder 6te Glied der genannten Formel = — 237,477.

Nun bringe man dieses Glied, und die bei Nro. 5. durch Hilfe der Kosinus zur rechten Seite gefundenen 5 Glieder in eine Summe, es ist

1tes Glied = ... — 275,204
2tes » = + 209,12
3tes » = + 290,511
4tes » = + 198,596
5tes » = + 364,753
6tes » = ... — 237,477

= 1062,980 — 512,681

$= 550{,}299$, und es ist die andere gesuchte Seite AG oder $g = 550{,}299$.

Man hat demnach den aufgestellten Formeln gemäß gefunden, daß der gesuchte Winkel $D = 270° 31'$, dann die eine gesuchte Seite $f = 617{,}524$, und die andere Seite $g = 550{,}299$.

Anmerkung: Wie bei der zweiten Auflösung des im §. 24. angeführten Beispieles, eben so könnte man auch bei diesem Beispiele zur Berechnung der unbekannten Seiten den anderen Endspunkt der Abszissenlinie als Anfangspunkt, oder auch die andere unbekannte Seite als Abszissenlinie annehmen (§. 23. Zus. III.).

§. 26.

III. Beispiel zur Aufgabe des §. 23.

Es seien (Fig. 11.) im Vierecke ABCD die Seite AB oder $a = 110$, und AD oder $d = 220$, und es sei der Winkel $A = 60° 40'$, dann $B = 115° 30'$, und $C = 116° 20'$, und man soll nebst dem Winkel D die Seiten BC und CD, oder b und c berechnen, welche unmittelbar auf einander folgen.

Auflösung:

1) Nach §. 20. berechne man den Winkel D, es ist $D = 2R(n-2) - (A+B+C) = 360° - 292° 30' = 67° 30'$ (1. §. 46.).

2) Man nehme die eine unbekannte Seite, etwa BC oder b als Abszissenlinie, und den Punkt B als Anfangspunkt an, und bestimme für C die Ordinate, es ist diese

$= a . \text{Sin. } B - d . \text{Sin.}(B+A) + c . \text{Sin.}(B+A+D) = 0.$

3) In dieser Gleichung bestimme man c, und zugleich für das Eck C bei der nämlichen Abszissenlinie vom Punkte B aus die Abszisse, es ist

$$c = \frac{-a . \text{Sin. } B + d . \text{Sin. } (B+A)}{\text{Sin. } (B+A+D)},$$

und $b = a . \text{Cos. } B - d . \text{Cos.}(B+A) + c . \text{Cos.}(B+A+D)$.

4) Man berechne, wie es beim II. Beispiele im §. 25. geschehen ist, die in diesen beiden Formeln vor-

kommenden gleichen Glieder mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen, welche die Produkte zum Voraus, und der Sinus und Kosinus haben:

α) Produkt —, B = 115° 30', Produkt +,
Sinus +; Suppl. W. = 64° 30'; Kosinus —;

L. a = L. 110 = 2,0413927,	Log. a = 2,0413927,
L. Sin. 64° 30' = 9,9554882 — 10,	L. Cos. 64° 30' = 9,6339844 — 10,
= 1,9968809	= 1,6753771
= Log. 99,2844,	= Log. 47,3562,
1tes Glied — 99,2844;	1tes Glied — 47,3562.

β) Produkt +, B + A = 176° 10', Produkt —,
Sinus +; Suppl. W. = 3° 50'; Kosinus —;

L. d = L. 220 = 2,3424227,	Log. d = 2,3424227,
L. Sin. 3° 50' = 8,8251299 — 10,	L. Cos. 3° 50' = 9,9990273 — 10,
= 1,1675526	= 2,3414500
= Log. 14,708,	= Log. 219,508,
2tes Glied + 14,708;	2tes Glied + 219,508.

5) Man bringe zur Bestimmung der Seite c die durch Hilfe der Sinus so eben zur linken Seite gefundenen zwei Glieder in eine Summe, es ist

1tes Glied = — 99,2844,
2tes » = + 14,708,
ihre Summe ist = — 84,5764;

Ferner ist B + A + D = 243° 40', und Sin. (B + A + D) = — Sin. 63° 40', wie auch Cos. (B + A + D) = — Cos. 63° 40'; deßhalb ist die Seite CD oder

$$c = \frac{-84{,}5764}{-\text{Sin. } 63° 40'} = \frac{84{,}5764}{\text{Sin. } 63° 40'}.$$

Nun ist Log. 84,5764 = 1,9272492,
Log. Sin. 63° 40' = 9,9524188 — 10,
— +

also Log. c = 1,9748304
= Log. 94,3692, und es ist die Seite c = 94,3692.

6) Um endlich auch die Seite b zu finden, bestimme man zu der bei Nro. 3. angeführten Formel noch das letzte Glied, welches = + c . Cos. (B + A + D); es ist

Log. c = Log. 94,3692 = 1,9748304,
Log. Cos. 63° 40' = 9,6469844 — 10,

= 1,6218148

= Log. 41,8615, und es ist, da zum Voraus das Produkt positiv, der Kosinus aber negativ ist, das dritte oder letzte Glied der genannten Formel = — 41,8615.

Nun bringe man dieses Glied, und die bei Nro. 4. durch Hilfe der Kosinus gefundenen zwei Glieder in eine Summe, es ist

1tes Glied = ... — 47,3562
2tes » = + 219,508
3tes » = ... — 41,8615

= + 219,508 — 89,2177

= 130,2903, und es ist die andere unbekannte Seite BC oder b = 130,2903.

Es ist daher die eine unbekannte Seite CD oder c = 94,3692, und die andere Seite BC oder b = 130,2903, während der gesuchte Winkel D = 67° 30'.

§. 27.

III. Aufgabe, einen Winkel, und zwei Seiten einer geradlinigten ebenen Figur zu finden, wenn diese letzteren nicht unmittelbar auf einander folgen, und alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind.

I. Auflösung:

1) Man drücke den gesuchten Winkel durch x, die eine unbekannte Seite durch y, und die andere durch z aus;

2) Man bestimme den Winkel nach §. 20., es ist, wenn S die Summe aller Winkel, und s die Summe der gegebenen Winkel bezeichnet, x = S — s;

3) Eine der unbekannten Seiten, etwa z, nehme man als Abszissenlinie, und einen ihrer Endspunkte als Anfangspunkt an;

4) Man bestimme für den anderen Endspunkt der Abszissenlinie die Ordinate, welche = 0 ist (§. 3. Zus. IV.);

5) Man erhält eine Gleichung, in welcher nur die andere gesuchte Seite y als eine unbekannte Größe vorkommt, und die somit bestimmt ist, und berechnet werden kann (Arithm. III. §. 98.);

6) Hat man die Seite y gefunden, so suche man bei der nämlichen Abszissenlinie und demselben Anfangspunkte die Abszisse für das am Endspunkte vorkommende Eck, es ist diese die angenommene Abszissenlinie selbst (§. 3. Zus. IV.), und deßhalb die gesuchte andere Seite z.

II. Auflösung:

1) Man bezeichne die unbekannten Seiten und den unbekannten Winkel wieder mit y, z und x, und suche den letzteren nach §. 20.;

2) Man nehme die eine unbekannte Seite, etwa z, als Abszissenlinie an, und bestimme für eines der beiden Ecke der anderen gesuchten Seite den zweifachen, gleichen Werth der entsprechenden Ordinate nach den zwei Anfangspunkten der Abszissenlinie (§. 6. Nro. 3 und 4.);

3) Diese beiden Werthe setze man sich gleich (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), man erhält eine Gleichung, in welcher nur die eine Seite y als unbekannt vorkommt, die deßwegen bestimmt ist, und gefunden werden kann (Arithm. III. §. 98.);

4) Endlich bestimme man nach den beiden Anfangspunkten derselben Abszissenlinie für das nämliche Eck der Seite y die beiden entsprechenden Abszissen, es gibt ihre Summe die ganze Abszissenlinie (§. 6. Nro. 6.), und deßhalb die gesuchte andere Seite z.

I. Zusatz: Die vorstehenden zwei Auflösungen gelten für alle Figuren von wie immer vielen Seiten, und es lassen sich die vorkommenden Formeln für eine jede beliebige Anzahl von Seiten erweitern, und abkürzen.

II. Zusatz: Wenn (Fig. 13.) im Siebenecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel gegeben sind, ausser dem Winkel F und den beiden Seiten AG und ED, oder d und g, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, so bestimme man den unbekannten Winkel nach §. 20., derselbe ist = S — s.

Man nehme die Seite AG oder g als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, bestimme nach der I. Auflösung für das Eck G die Ordinate, welche = 0 ist, und suche in dieser Gleichung die Seite ED oder d, während man auch für das Eck G vom Anfangspunkte A aus die Abszisse sucht, welche die andere gesuchte Seite *AG* oder g gibt; es ist

$$0 = a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin. } (A + B) + c \cdot \text{Sin. } (A + B + C) - d \cdot \text{Sin. } (A + B + C + D) + e \cdot \text{Sin. } (A + B + C + D + E) - f \cdot \text{Sin. } (A + B + C + D + E + F),$$

somit

$$d = [a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin. } (A + B) + c \cdot \text{Sin. } (A + B + C) + e \cdot \text{Sin. } (A + B + C + D + E) - f \cdot \text{Sin. } (A + B + C + D + E + F)] : \text{Sin. } (A + B + C + D);$$

und

$$g = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos. } (A + B) + c \cdot \text{Cos. } (A + B + C) - d \cdot \text{Cos. } (A + B + C + D) + e \times \text{Cos. } (A + B + C + D + E) - f \cdot \text{Cos. } (A + B + C + D + E + F).$$

III. Zusatz: Wenn bei diesem Siebenecke die nämlichen Stücke gegeben sind, und man wieder die Seiten d und g nebst dem Winkel F sucht, so ist, wenn der Winkel F nach §. 20. gefunden ist, nach der II. Auflösung bei der Abszissenlinie AG nach dem Anfangspunkte A die Ordinate

$$Dh = a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin. } (A + B) + c \cdot \text{Sin. } (A + B + C),$$

und nach dem Anfangspunkte G ist

$$Dh = f \cdot \text{Sin. } G - e \cdot \text{Sin. } (G + F) + d \cdot \text{Sin. } (G + F + E),$$

weßhalb

$$f \cdot \text{Sin. } G - e \cdot \text{Sin. } (G + F) + d \cdot \text{Sin. } (G + F + E) = a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin. } (A + B) + c \cdot \text{Sin. } (A + B + C), \text{ und}$$

$$d = [a \cdot \text{Sin. } A - b \cdot \text{Sin.}(A+B) + c \cdot \text{Sin.}(A+B+C) - f \cdot \text{Sin. } G + e \cdot \text{Sin.}(G+F)] : \text{Sin.}(G+F+E).$$

Endlich ist nach der nämlichen II. Auflösung $AG = Ah + Gh$, somit

$$g = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos.}(A+B) + c \cdot \text{Cos.}(A+B+C) + f \cdot \text{Cos. } G - e \cdot \text{Cos.}(G+F) + d \times \text{Cos.}(G+F+E).$$

IV. Zusatz: Da man bei einer geradlinigten ebenen Figur, wenn alle Seiten und Winkel gegeben sind, außer einem Winkel und zwei Seiten, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, nach den angeführten Lehrsätzen ebenfalls Gleichungen aufstellen kann, in welchen allemal nur ein unbekanntes Stück, der gesuchte Winkel oder eine der gesuchten Seiten, vorkommt, und in solchen einfachen Gleichungen die unbekannte Größe bestimmt ist (Arithm. III. §. 98.), so ist eine geradlinigte ebene Figur auch durch alle Seiten und Winkel, außer einem Winkel und zwei nicht unmittelbar auf einander folgenden Seiten, bestimmt oder gegeben (I. §. 22., dann §. 47., und §. 54.).

§. 28.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 27.

Es seien (Fig. 13.) im Siebenecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel, außer dem Winkel F und den beiden Seiten ED und AG, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, gegeben, und man soll die unbekannten drei Stücke berechnen, im Falle die gegebenen Stücke folgende Größe haben:

Die gegebenen Seiten:
$a = 531,$
$b = 361,$
$c = 383,$
$e = 400,$
$f = 617{,}524;$

Die gegebenen Winkel:
$A = 121° 13',$
$B = 113° 23',$
$C = 84° 44',$
$D = 270° 31',$
$E = 105° 55',$
$G = 112° 37'.$

Auflösung:

Der gesuchte Winkel F ist $= 180° \times (7 - 2) - 808° 23' = 900° - 808° 23' = 91° 37'.$

2) Nach der I. Auflösung des vorigen §. gibt die für d in dem II. Zusatze angeführte Formel die gesuchte Seite ED.

Nun ist nach §. 25. Nro. 5.

$$\begin{aligned}
&a \,.\, \text{Sin.}\, A = +454{,}118\\
-\,&b \,.\, \text{Sin.}(A + B) = +294{,}261\\
+\,&c \,.\, \text{Sin.}(A + B + C) = \ldots\ldots\ldots - 249{,}585\\
+\,&e \,.\, \text{Sin.}(A + B \ldots + E) = \ldots\ldots\ldots - 164{,}181\\
-\,&f \,.\, \text{Sin.}(A + B \ldots + F) = \ldots\ldots\ldots - 570{,}035\\
&= +748{,}379 - 983{,}801\\
&= -235{,}422.
\end{aligned}$$

Daher ist ED oder $d = \frac{-235{,}422}{-\text{Sin.}49^\circ 51'} = \frac{235{,}422}{\text{Sin.}49^\circ 51'}$,

und Log. 235,422 = 2,3718475,
dann Log. Sin. 49° 51' = 9,8832974 — 10,
— +

also Log. d = 2,4885501
= Log. 307,999.

Die gesuchte Seite ED oder d ist demnach = 307,999, somit beinahe = 308.

3) Auf die nämliche Weise, wie es im §. 25. bei Nro. 5., und bei Nro. 6 und 7. geschehen ist, suche man die Seite g, man findet wieder, daß AG oder g beinahe = 550,299.

§. 29.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 27.

Es sei (Fig. 4.) im Sechsecke ABCDEF der Winkel D nebst den zwei Seiten BC und AF zu finden, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, und es haben die gegebenen Stücke folgende Größe:

Größe der gegebenen Seiten. { a = 114, c = 55, d = 89, e = 100,85;

Größe der gegebenen Winkel. { A = 112° 16', B = 107° 7', C = 148° 21', E = 162° 30', F = 77° 24'.

Auflösung:

1) Nach §. 20. ist der gesuchte Winkel $D = 180° \times (6-2) - 607° 38' = 720° - 607° 38' = 112° 22'$.

2) Nach der II. Auflösung des §. 27. nehme man die unbekannte Seite AF oder f als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, und suche für das an der anderen unbekannten Seite BC liegende Eck B den zweifachen, gleichen Werth der Ordinate Bm, setze diese Werthe sich gleich, dann bestimme man in der neuen Gleichung die Seite b, und wenn diese gefunden ist, so suche man auch die andere unbekannte Seite f, indem man bei der Abszissenlinie für das Eck F vom Anfangspunkte *A* aus die Abszisse bestimmt; es ist $Bm = a \,.\, \text{Sin. } A$, und nach dem anderen Anfangspunkte ist $Bm = e \,.\, \text{Sin. } F - d \,.\, \text{Sin. } (F + E) + c \,.\, \text{Sin. } (F + E + D) - b \,.\, \text{Sin. } (F + E + D + C)$,

also $a \,.\, \text{Sin. } A = e \,.\, \text{Sin. } F - d \,.\, \text{Sin. } (F + E) + c \times \text{Sin. } (F + E + D) - b \,.\, \text{Sin. } (F + E + D + C)$,

und deßhalb

$$b = [-a \,.\, \text{Sin. } A + e \,.\, \text{Sin. } F - d \,.\, \text{Sin. } (F+E) + c \,.\, \text{Sin. } (F+E+D)] : \text{Sin. } (F+E+D+C).$$

Ferner ist die andere unbekannte Seite AF oder

$$f = a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos. } (A+B) + c \,.\, \text{Cos. } (A+B+C) - d \,.\, \text{Cos. } (A+B+C+D) + e \,.\, \text{Cos. } (A+B+C+D+E).$$

3) Nun ist (§. 11.)

$-a \,.\, \text{Sin. } A =$	.....	$-105{,}4999$
$+e \,.\, \text{Sin. } F =$		$+98{,}4212$
$-d \,.\, \text{Sin. } (F+E) =$		$+76{,}9985$
$+c \,.\, \text{Sin. } (F+E+D) =$	.....	$-7{,}4009$
$=$		$175{,}4197 - 112{,}9008$
$=$		$+62{,}5189.$

Daher ist $b = \dfrac{62{,}5189}{\text{Sin. } (F+E+D+C)} = \dfrac{62{,}5189}{\text{Sin. } 39° 23'}$,

und Log. 62,5189 = 1,7960113,

dann Log. Sin. 39° 23' = 9,8024355 — 10,

— +

also Log. b = 1,9935758

= 98,53199, weßhalb die Seite BC oder b = 98,53199, somit beinahe = 98,5.

4) Um endlich auch die Seite AF oder f zu finden, suche man nach der bei Nro. 2. angeführten Formel auf die nämliche Weise, wie es im §. 11. bei der I. und II. Auflösung geschehen ist, bei der nämlichen Abszissenlinie AF und dem Anfangspunkte A für das Eck F die Abszisse, man findet, daß f = 153,999, somit beinahe = 154.

Daher ist der unbekannte Winkel D = 112° 22', dann die eine unbekannte Seite b ist = 98,5, und die andere Seite f ist = 154.

III. Abschnitt.

Bestimmung einer Seite, und zweier Winkel bei geradlinigten ebenen Figuren.

---

§. 30.

I. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur eine Seite und zwei Winkel zu berechnen, wenn alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, und die beiden gesuchten Winkel an der unbekannten Seite anliegen.

I. Auflösung:

1) Man bezeichne die unbekannte Seite mit x, und die gesuchten Winkel mit y und z;

2) Man nehme eine Seite, welche an der unbekannten Seite x anliegt, somit mit ihr unmittelbar zusammenstoßt, als Abszissenlinie, und den anderen, gegenüber stehenden Punkt als Anfangspunkt an, und suche nach §. 7. für den von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel die Tanges, woraus dieser Winkel selbst bestimmt werden kann, im Falle man auf die Zeichen der trigonometrischen Linien, und auf die Beschaffenheit der Figur selbst die gehörige Rücksicht nimmt;

3) Aus den gegebenen Winkeln, und dem so eben gefundenen Winkel berechne man nach §. 20. den anderen gesuchten Winkel;

4) Man behalte die nämliche Abszissenlinie, und den nämlichen Anfangspunkt, und bestimme für den anderen Endspunkt die Abszisse, man erhält eine Gleichung, in welcher nur die andere gesuchte Seite als eine unbekannte Größe vorkommt, die deßhalb gefunden werden kann (Arithm. III. §. 98.), wenn man zugleich nach der geraden oder ungeraden Anzahl der Seiten bei dem vorkommenden Nenner oder Divisor auf das Zeichen dieses letzteren die gehörige Rücksicht nimmt.

II. Auflösung:

1) Nach §. 9. suche man unmittelbar die unbekannte Seite x, es kann diese bestimmt werden, wenn gleich noch ihre beiden anliegenden Winkel unbekannt sind;

2) Aus der so eben gefundenen Seite, und aus den gegebenen Stücken suche man nach §. 8. den einen unbekannten Winkel y, und nehme dabei sowohl auf die Zeichen der trigonometrischen Linien, als auch auf die Beschaffenheit der Figur selbst die geeignete Rücksicht, um zu erkennen, ob der gesuchte Winkel hohl oder erhaben ist;

3) Aus diesem Winkel, und aus den gegebenen Winkeln suche man endlich nach §. 20. den anderen unbekannten Winkel;

4) Ist die Natur des einen, zuerst gesuchten Winkels zum Voraus nicht bekannt, so nehme man solchen nach Belieben hohl oder erhaben an, bestimme nach dieser Annahme den anderen unbekannten Winkel nach §. 20., und suche nach Nro. 4. der vorigen Auflösung die unbekannte Seite; wird diese positiv, so ist der angenommene erste Winkel der wahre, wird aber die Seite negativ, so ist der angenommene Werth des Winkels unrichtig, da eine Seite nicht negativ sein kann.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 13.) im Siebenecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel gegeben sind, außer

der Seite FG oder f, und den beiden anliegenden Winkeln F und G, so findet man nach der vorstehenden I. Auflösung zuerst den unbekanten Winkel G, wenn man die anliegende Seite AG als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt annimmt, und nach §. 7. die Tangens des Winkels G bestimmt.

Es ist Tang. $G = [a . Sin. A - b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) - d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E)] : [g - a . Cos. A + b \times Cos. (A + B) - c . Cos. (A + B + C) + d . Cos. (A + B + C + D) - e . Cos. (A + B + C + D + E)]$.

Ist die gefundene Tangens positiv, so ist der Winkel entweder spitzig oder erhaben, aber kleiner als 270 Grad, und ist sie negativ, so ist der Winkel stumpf oder erhaben, aber größer als 270 Grad (II. §. 78. c.), das ist, im ersten Falle ist der Winkel im ersten oder dritten Quadranten, und im zweiten Falle ist er im zweiten oder vierten Quadranten (II. §. 64. b.).

Aus dem gefundenen Winkel G und den gegebenen fünf Winkeln kann man nach §. 20. auch den Winkel F finden; dieser ist

$= 180° \times (n - 2) - (A + B + C + D + E + G.)$.

Endlich bestimme man für das Eck G bei der nämlichen Abszissenlinie AG und demselben Anfangspunkte A die entsprechende Abszisse, und suche in dieser Gleichung die Seite f; es ist

$g = a . Cos. A - b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) - d . Cos. (A + B + C + D) + e . Cos. (A + B + C + D + E) - f . Cos. (A + B + C + D + E + F)$.

mithin ist

$f = [a . Cos. A - b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) - d . Cos. (A + B + C + D) + e . Cos. (A + B + C + D + E) - g] : Cos. (A + B + C + D + E + F)$.

Weil im Gliede, welches f ausdrückt, eine gerade Anzahl von Gliedern vorkommt, so ist der Divisor positiv; wäre jenes nicht, so müßte er bei einer ungeraden Anzahl von Gliedern negativ gesetzt werden, und

in diesem Falle wäre die Anzahl aller Seiten der Figur eine gerade Zahl.

II. Zusatz: Sind im nämlichen Vielecke (Fig. 13.) die vorigen Stücke gegeben, und man sucht wieder die Seite f mit den beiden anliegenden Winkeln F und G, so ist nach der II. Auflösung (§. 9.)

$$f^2 = g^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2ga \cdot \text{Cos. A} + 2gb \times \text{Cos. (A + B)} - 2gc \cdot \text{Cos. (A + B + C)} + 2gd \times \text{Cos. (A + B + C + D)} - 2ge \cdot \text{Cos. (A + B + C + D + E)} - 2ab \cdot \text{Cos. B} + 2ac \cdot \text{Cos. (B + C)} - 2ad \cdot \text{Cos. (B + C + D)} + 2ae \cdot \text{Cos. (B + C + D + E)} - 2bc \cdot \text{Cos. C} + 2bd \cdot \text{Cos. (C + D)} - 2be \cdot \text{Cos. (C + D + E)} - 2cd \cdot \text{Cos. D} + 2ce \times \text{Cos. (D + E)} - 2de \cdot \text{Cos. E.}$$

Aus der gefundenen Seite f, und aus den gegebenen Stücken berechne man nach der nämlichen II. Auflösung mittels des im §. 8. aufgestellten Lehrsatzes den einen unbekannten Winkel F; es ist

$$\text{Cos. } F = \left[e^2 + f^2 - g^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ga \times \text{Cos. A} - 2gb \cdot \text{Cos. (A + B)} + 2gc \cdot \text{Cos. (A + B + C)} - 2gd \cdot \text{Cos. (A + B + C + D)} + 2ab \times \text{Cos. B} - 2ac \cdot \text{Cos. (B + C)} + 2ad \cdot \text{Cos. (B + C + D)} + 2bc \cdot \text{Cos. C} - 2bd \cdot \text{Cos. (C + D)} + 2cd \times \text{Cos. C} \right] : 2ef.$$

Um aus dem gefundenen Kosinus den entsprechenden Winkel anzugeben, muß man auf das Zeichen die geeignete Rücksicht nehmen; ist dieses positiv, so ist der Winkel im ersten oder vierten Quadranten, ist es negativ, so ist derselbe im zweiten oder dritten Quadranten (II. §. 71. b.). Aus diesem Grunde muß es aus der Beschaffenheit der gegebenen Winkel, oder aus der Figur selbst zum Voraus schon bekannt sein, ob der gesuchte Winkel F hohl oder erhaben ist.

Endlich suche man aus dem bekannten Winkel F, und aus den gegebenen Winkeln den anderen unbekannten Winkel G; es ist

$$G = 2R(n - 2) - (A + B + C + D + E + F).$$

III. Zusatz: Da man in Gemäßheit der vorstehenden Auflösungen der in diesem §. vorkommenden Auf-

gabe bei der Berechnung des ersten unbekannten Winkel sowohl aus den Zeichen der trigonometrischen Linien, als auch aus der Beschaffenheit der Figur selbst wissen muß, in welchem Halbkreise, und in welchem Quadranten der gesuchte Winkel liegt, so ist eine geradlinigte ebene Figur, bei welcher außer einer Seite und zwei an dieser anliegenden Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel bekannt sind, unmittelbar durch die bekannten Stücke noch nicht bestimmt oder gegeben (§. 23. Zus. VII., und §. 27. Zus. IV.).

§. 31.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 30.

Man soll (*Fig.* 13.) im Siebenecke ABCDEFG die Seite $FG = f$, und die beiden anliegenden Winkel F und G berechnen, wenn alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, und diese letzteren folgende Größe haben:

Größe der gegebenen Seiten:
$a = 531$,
$b = 361$,
$c = 383$,
$d = 308$,
$e = 400$,
$g = 550{,}299$;

Größe der gegebenen Winkel:
$A = 121° 13'$,
$B = 113° 23'$,
$C = 84° 44'$,
$D = 270° 31'$,
$E = 105° 55'$.

Auflösung:

1) Nach der im §. 30. angeführten I. Auflösung, und nach dem beigefügten 1. Zusatze bestimme man mit Rücksicht auf die im §. 25. bei Nro. 5. schon berechneten Werthe den Zähler und Nenner des Bruches, welcher die Größe der Tangens des gesuchten Winkels G angibt; es ist

$$a \,.\, \text{Sin. A} = + 454{,}118$$
$$-b \,.\, \text{Sin.}(A + B) = + 294{,}261$$
$$+c \,.\, \text{Sin.}(A+B+C) = \ldots\ldots\ldots - 249{,}585$$
$$-d \,.\, \text{Sin.}(A \ldots + D) = + 235{,}422$$
$$+e \,.\, \text{Sin.}(A+B \ldots + E) = \ldots\ldots\ldots - 164{,}181$$

mithin der Zähler $= + 983{,}801 - 413{,}766$
$= 570{,}035$.

Fer-

Ferner ist

$$\begin{aligned} g &= 550{,}299 \\ -a \,.\, Cos.\, A &= 275{,}204 \\ +b \,.\, Cos.(A+B) &= \ldots\ldots - 209{,}12 \\ -c \,.\, Cos\,(A+B+C) &= \ldots\ldots - 290{,}511 \\ +d \,.\, Cos.(A \ldots +D) &= \ldots\ldots - 198{,}596 \\ -e \,.\, Cos.(A \ldots +E) &= \ldots\ldots - 364{,}753 \end{aligned}$$

folglich der Nenner $= 825{,}503 - 1062{,}980$
$= -237{,}477,$

somit ist $Tang.\, G = \frac{+570{,}035}{-237{,}477} \times r,$

und $Log.\,(r \times 570{,}035) = 12{,}7559015,$
dann $Log.\, 237{,}477 = 2{,}3756215,$

also $Log.\, Tang.\, G = 10{,}3802800$
$= Log.\, Tang.\, 67° 23'.$

2) Da die Tangens negativ ist, so liegt der gesuchte Winkel im zweiten oder vierten Quadranten, und ist deßhalb hohl oder erhaben (II. §. 78. c.), und $= 112° 37'$, oder $= 292° 37'$ (II. §. 74 und §. 82.); erhaben kann aber der Winkel nicht sein, weil nach §. 20. die Winkel $F + G = 2R(n-2) - (A + B + C + D + E) = 900° - 695° 46' = 204° 14'$, daher muß der gesuchte Winkel hohl sein, und G ist $= 112° 37'$.

3) Nach §. 20., oder nach Nro. 1. suche man den anderen unbekannten Winkel F; dieser ist $= 91° 37'$, weil $F + G = 204° 14'$, und $F = 204° 14' - G = 204° 14' - 112° 37' = 91° 37'$, oder weil $F = 2R \times (n-2) - (A + B + C + D + E + G) = 900° - 808° 23' = 91° 37'$.

4) Endlich bestimme man nach der im §. 30. angeführten I. Auflösung, und nach dem beigefügten I. Zusatze die unbekannte Seite FG oder f. Die bei Nro. 1. nach §. 25. Nro. 5. zur Bestimmung des Nenners ausgesetzten sechs Werthe nehme man, weil in der angeführten Formel die Glieder der Ordnung nach verschiedene Zeichen haben, mit entgegengesetzten Zeichen,

man findet, daß der neue Zähler $=(209{,}12 + 290{,}511 + 198{,}596 + 364{,}753) - (550{,}299 + 275{,}204) = 1062{,}980 - 825{,}503 = + 237{,}477$, weßhalb

$$f = \frac{237{,}477}{\text{Cos. } (A + B + C + D + E + F)}.$$

Die Summe der Winkel $A+B+C+D+E+F$ ist $= 787° 23'$, und Cos. $787° 23' =$ Cos. $67° 23'$.

Nun ist Log. $237{,}477 = 2{,}3756215$,

und Log. Cos. $67° 23' = 9{,}5849685 - 10$,

also Log. $f = 2{,}7906530$

$=$ Log. $617{,}522$, und die gesuchte Seite f ist $= 617{,}522$.

Daher ist der eine gesuchte Winkel $F = 91° 37'$, dann der andere gesuchte Winkel G ist $= 112° 37'$, und die gesuchte Seite f ist $= 617{,}522$.

§. 32.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 30.

Man soll (Fig. 4.) im Sechsecke ABCDEF die Seite EF oder e, und die ihr anliegenden Winkel E und F berechnen, wenn alle übrigen Seiten und Winkel bekannt sind, und folgende Größe haben:

Größe der Seiten: $a = 114$, $b = 98{,}5$, $c = 55$, $d = 89$, $f = 154$;

Größe der Winkel: $A = 112° 16'$, $B = 107° 7'$, $C = 148° 21'$, $D = 112° 22'$.

Auflösung:

1) In Gemäßheit der im §. 30. angeführten II. Auflösung suche man nach §. 9. das Quadrat der unbekannten Seite e, und dann daraus diese letztere selbst; es ist

$$e^2 = f^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2fa \cdot \text{Cos. } A + 2fb \times \text{Cos. } (A + B) - 2fc \cdot \text{Cos. } (A + B + C) + 2fd \cdot \text{Cos. } (A + B + C + D) - 2ab \cdot \text{Cos. } B + 2ac \cdot \text{Cos. } (B + C) - 2ad \cdot \text{Cos. } (B + C + D) - 2bc \cdot \text{Cos. } C + 2bd \cdot \text{Cos. } (C + D) - 2cd \times \text{Cos. } D.$$

2) Aus der gefundenen Seite e, und aus den gegebenen Stücken bestimme man nach §. 8. den unbekannten Winkel E; es ist

$$\text{Cos. E} = [d^2 + e^2 - f^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2af \times \text{Cos. A} - 2bf \,.\, \text{Cos.}(A + B) + 2cf \,.\, \text{Cos.}(A + B + C) + 2ab \,.\, \text{Cos. B} - 2ac \,.\, \text{Cos.}(B + C) + 2bc \,.\, \text{Cos. C}] : 2de.$$

Aus der Beschaffenheit des gefundenen Kosinus, das ist, aus dem Zeichen desselben erkennt man, ob der gesuchte Winkel E im ersten oder vierten Quadranten, oder ob er im zweiten oder dritten Quadranten liegt; da überdieß zum Voraus bekannt sein muß, ob dieser Winkel hohl oder erhaben ist, so kann man die Größe des gesuchten Winkels E selbst angeben.

3) Nach §. 20. suche man endlich aus dem bekannten Winkel E, und den gegebenen Winkeln A, B, C und D den unbekannten Winkel F.

4) Nach Nro. 1. bestimme man, um e^2, und daraus e zu finden, die einzelnen Glieder der angeführten Formel; es ist

$$\begin{aligned}
+ f^2 &= 23716 \\
+ a^2 &= 12996 \\
+ b^2 &= 9702{,}25 \\
+ c^2 &= 3025 \\
+ d^2 &= 7921 \\
- 2fa \,.\, \text{Cos. A} &= 13304{,}5 \\
+ 2fb \,.\, \text{Cos.}(A + B) &= \ldots\ldots - 23448{,}8 \\
- 2fc \,.\, \text{Cos.}(A + B + C) &= \ldots\ldots - 16785{,}9 \\
+ 2fd \,.\, \text{Cos.}(A + B + C + D) &= \ldots\ldots - 13747{,}4 \\
- 2ab \,.\, \text{Cos. B} &= 6609{,}8 \\
+ 2ac \,.\, \text{Cos.}(B + C) &= \ldots\ldots - 3146{,}82 \\
- 2ad \,.\, \text{Cos.}(B + C + D) &= \ldots\ldots - 20102{,}7 \\
- 2bc \,.\, \text{Cos. C} &= 9223{,}52 \\
+ 2bd \,.\, \text{Cos.}(C + D) &= \ldots\ldots - 2828{,}24 \\
- 2cd \,.\, \text{Cos. D} &= 3725{,}41
\end{aligned}$$

folglich $e^2 = 90223{,}48 - 80059{,}86$

$= 10163{,}62$, und $e = \sqrt{10163{,}62} = 100{,}81$,

weßhalb die gesuchte Seite $e = 100{,}81$.

5) Nach Nro. 2. bestimme man den Kosinus von E, um diesen Winkel zu finden, indem man die einzelnen Glieder der angeführten Formel aussetzt, und dann dieselben in eine Summe bringt; es ist

$+ d^2 = 7921$
$+ e^2 = 10163{,}62$
$- f^2 = \ldots\ldots - 23716$
$- a^2 = \ldots\ldots - 12996$
$- b^2 = \ldots\ldots - 9702{,}25$
$- c^2 = \ldots\ldots - 3025$

---

also $d^2 + e^2 - f^2 \ldots\ldots = 18084{,}62 - 49439{,}25$
dann $2af \,.\, Cos.\, A = \ldots\ldots - 13304{,}5$
$- 2bf \,.\, Cos.\,(A + B) = 23448{,}8$
$+ 2cf \,.\, Cos.\,(A + B + C) = 16785{,}9$
$+ 2ab \,.\, Cos.\, B = \ldots\ldots - 6609{,}8$
$- 2ac \,.\, Cos.\,(B + C) = 3146{,}82$
$+ 2bc \,.\, Cos.\, B = \ldots\ldots - 9223{,}52$

---

folglich $Cos.\, E \times 2de = 61466{,}14 - 78577{,}07$
$= 17110{,}93$, und

$$Cos.\, E = - \frac{17110{,}93}{2de} \times r \text{ (§. 3. Zus. VI.);}$$

nun ist $Log.\,(17110{,}93 \times r) = 14{,}2332738$,
und $Log.\, 2de = Log.\,(2 \times 89 \times 100{,}81) = 4{,}2539442$,

---

also $Log.\, Cos.\, E = 9{,}9793296$
$= Log.\, Cos.\, 17^\circ\, 32'\, 15''$.

Der Kosinus ist negativ, und daher der entsprechende Winkel E im zweiten oder dritten Quadranten (II. §. 71. b.), und also $= 162^\circ\, 27'\, 45''$, oder $= 197^\circ\, 32'\, 15''$; weil es überdieß zum Voraus bekannt sein muß, ob der gesuchte Winkel E hohl oder erhaben ist, so ist derselbe $= 162^\circ\, 27'\, 45''$.

6) Aus dem Winkel E suche man endlich den Winkel F; es ist nach §. 20. die Summe aller Winkel dieser Figur $= 2R(n - 2) = 180^\circ \times 4 = 720^\circ$, und somit $E + F = 720^\circ - (A + B + C + D)$ $= 720^\circ - 480^\circ\, 6' = 239^\circ\, 54'$, und $F = 239^\circ\, 54' - E = 239^\circ\, 54' - 162^\circ\, 27'\, 45'' = 77^\circ\, 26'\, 15''$.

Man hat auf diese Weise gefunden, daß die gesuchte Seite $e = 100{,}81$, dann der eine gesuchte Win-

kel E = 162° 27′ 45″, und der andere Winkel F = 77° 26′ 15″.

Anmerkung: Bei der Bestimmung des Werthes von e kommen zur Ausziehung der Wurzel nebst der ganzen Zahl nur zwei Dezimalen vor; deßhalb ist auch die Seite e nur bis auf ein Dezimalziffer genau bestimmt, und es ergeben sich daraus auch die gesuchten Winkel mit einiger Abweichung.

§. 33.

II. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur eine Seite und zwei Winkel zu berechnen, wenn alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, und die beiden gesuchten Winkel an der unbekannten Seite nicht anliegen, aber doch unmittelbar auf einander folgen.

Auflösung:

1) Man drücke die gesuchte Seite mit x, und die beiden unbekannten Winkel mit y und z aus;

2) Man nehme die unbekannte Seite x als Abszissenlinie an, und bestimme die beiden Gleichungen der Ordinate für einen der unbekannten Winkel, etwa für den Winkel y;

3) Durch die Vergleichung der Werthe erhält man eine dritte Gleichung (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), in welcher nur der andere gesuchte Winkel z als unbekannte Größe vorkommt, welche somit gefunden werden kann (Arithm. III. §. 98.), da man aus den Zeichen des Sinus erkennt, ob der Winkel im ersten oder zweiten Halbkreise liegt, und zum Voraus bekannt sein muß, ob der Winkel im ersten Falle spitzig oder stumpf ist, oder ob er im zweiten Falle im dritten oder vierten Quadranten liegt;

4) Aus dem gefundenen Winkel z, und aus den gegebenen Winkeln suche man nach §. 20. den anderen unbekannten Winkel y;

5) Endlich suche man die unbekannte Seite x

indem man sie zur Abszissenlinie, und einen ihrer Endspunkte als Anfangspunkt nimmt, und für das andere anliegende Eck die entsprechende Abszisse bestimmt, welche der gesuchten Seite gleich ist (§. 6.); oder man behalte die nämliche Abszissenlinie, und berechne für das nämliche Eck von den Anfangspunkten aus die beiden Abszissen, welche zusammen die ganze Abszissenlinie, und somit die gesuchte Seite geben (§. 6. Nro. 6.).

1. Zusatz: Es seien (Fig. 4.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel bekannt, außer der Seite AF $= f$, und den Winkeln B und C, welche unmittelbar auf einander folgen, aber der unbekannten Seite AF nicht anliegen.

Man nehme die gesuchte Seite als Abszissenlinie an, und bestimme etwa für C nach den beiden Anfangspunkten A und F die Ordinate Cn; es ist

$Cn = a \,.\, \text{Sin. } A - b \,.\, \text{Sin. } (A + B)$, und

$Cn = e \,.\, \text{Sin. } F - d \,.\, \text{Sin.} (F + E) + c \,.\, \text{Sin.} (F + E + D)$,

also $e \,.\, \text{Sin. } F - d \,.\, \text{Sin.} (F + E) + c \,.\, \text{Sin.} (F + E + D)$

$= a \,.\, \text{Sin. } A - b \,.\, \text{Sin.} (A + B)$, und $b \,.\, \text{Sin.} (A + B)$

$= a \,.\, \text{Sin. } A - e \,.\, \text{Sin. } F + d \,.\, \text{Sin. } (F + E)$

$- c \,.\, \text{Sin. } (F + E + D)$, weßhalb

$$\text{Sin. } (A + B) = \left[a \,.\, \text{Sin. } A - e \,.\, \text{Sin. } F + d \,.\, \text{Sin. } (F + E) - c \,.\, \text{Sin. } (F + E + D) \right] : b.$$

Aus dem gefundenen Winkel B, und den bekannten Winkeln kann man die Größe des anderen Winkels C finden; es ist nach §. 20. der Winkel

$$C = 2R(n - 2) - (A + B + D + E + F).$$

Endlich findet man die unbekannte Seite AF oder f, wenn man diese als Abszissenlinie behält, und von einem ihrer Anfangspunkte aus für das letzte Eck die entsprechende Abszisse sucht; es ist

$AF = f = a \,.\, \text{Cos. } A - b \,.\, \text{Cos. } (A + B) + c \,.\, \text{Cos.} (A + B + C) - d \,.\, \text{Cos.} (A \ldots + D) + e \,.\, \text{Cos.} (A \ldots + E)$

$= e \,.\, \text{Cos. } F - d \,.\, \text{Cos.} (F + E) + c \,.\, \text{Cos.} (F + E + D) - b \,.\, \text{Cos.} (F + E + D + C) + a \,.\, \text{Cos.} (F + E + D + C + B).$

Bestimmt man bei der nämlichen Abszissenlinie für das Eck C die beiden Abszissen An und Fn, so ist

$$AF = An + Fn = f = a \cdot \text{Cos. } A - b \cdot \text{Cos.}(A+B) + e \cdot \text{Cos. } F - d \cdot \text{Cos.}(F+E) + b \cdot \text{Cos.}(F+E+D).$$

II. Zusatz: Weil man bei der Aufgabe dieses §. in Folge der beigefügten Auflösungen aus der Beschaffenheit sowohl der trigonometrischen Linien, als auch der Figur selbst wissen muß, in welchem Halbkreise, und in welchem Quadranten die gesuchten Winkel liegen, so ist eine geradlinigte ebene Figur durch alle Seiten und Winkel, außer einer Seite und zwei an dieser Seite nicht anliegenden, aber doch unmittelbar auf einander folgenden Winkeln, auch nicht unmittelbar gegeben oder bestimmt (§. 30. Zus. III.).

§. 34.

Beispiel zur vorhergehenden Aufgabe.

Man soll (Fig. 4.) im Sechsecke ABCDEF die Seite AF oder f, und die beiden, dieser Seite nicht anliegenden, aber doch unmittelbar auf einander folgenden Winkel B und C berechnen, wenn alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, und diese letztere folgende Größe haben:

Größe der Seiten.
$$\begin{cases} a = 114, \\ b = 98{,}5, \\ c = 55, \\ d = 89, \\ e = 100{,}85; \end{cases}$$

Größe der Winkel.
$$\begin{cases} A = 112^\circ\ 16', \\ D = 112^\circ\ 22', \\ E = 162^\circ\ 30', \\ F = 77^\circ\ 24'. \end{cases}$$

I. Auflösung:

1) Es ist $A = 112^\circ\ 16'$, und $112^\circ\ 16' + 67^\circ\ 44' = 180^\circ$, also $\text{Sin. } A = \text{Sin. } 67^\circ\ 44'$, und $\text{Cos. } A = -\text{Cos. } 67^\circ\ 44'$; dann $F = 77^\circ\ 24'$, also $\text{Sin. } F = \text{Sin. } 77^\circ\ 24'$, und $\text{Cos. } F = \text{Cos. } 77^\circ\ 24'$; ferner ist $F + E = 239^\circ\ 54'$, und $239^\circ\ 54' - 180^\circ = 59^\circ\ 54'$, also $\text{Sin.}(F+E) = -\text{Sin. } 59^\circ\ 54'$, und $\text{Cos.}(F+E)$

$= -$ Cos. 59° 54′; endlich ist F + E + D $=$ 352° 16′, und 352° 16′ + 7° 44′ $=$ 360°, folglich Sin. (F + E + D) $= -$ Sin. 7° 44′, und Cos. (F + E + D) $=$ Cos. 7° 44′.

2) Nach dem I. Zusatze des vorigen §. ist

Sin. (A + B) $=$ [a . *Sin.* A $-$ e . *Sin.* F + d $\times$ *Sin.* (F + E) $-$ c . Sin. (F + E + D)] : b.

3) Uiberdieß ist nach §. 11.

a . Sin. A	$=$	105,5
$-$ e . Sin. F	$=$ . . . $-$	98,421
+ d . Sin. (F + E)	$=$ . . . $-$	77
$-$ c . Sin. (F + E + D)	$=$	7,4
die ganze Summe ist	$=$ 112,9 $-$	175,421
	$=-$	62,521;

mithin ist Sin. (A + B) $=$ Sin. (112° 16′ + B) $= -\frac{62{,}521}{b} \times r.$

Nun ist Log. (r $\times$ 62,521) $=$ 11,7960259,
und Log. b $=$ Log. 98,5 $=$ 1,9934362,

also Log. Sin. (112° 16′ + B) $=$ 9,8025897
$=$ Log. Sin. 39° 23′.

Oder es ist, wenn man die einzelnen Produkte genauer durch mehrere Dezimalen ausdrückt, und die Größe der Winkel ebenfalls wieder nur bis auf Minuten angibt:

a . Sin. A	$=$	105,499
$-$ e . Sin. F	$=$ . . . . . $-$	98,421
+ d . Sin. (F + E)	$=$ . . . . . $-$	76,9985
$-$ c . Sin. (F + E + D)	$=$	7,40095
die ganze Summe ist	$=$ 112,89995 $-$	175,4195
	$=-$	62,51955;

mithin ist Sin. (A + B) $=$ Sin. (112° 16′ + B) $= -\frac{62{,}51955}{b} \times r.$

Nun ist Log. (r $\times$ 62,51955) $=$ 11,7960158,
und Log. b $=$ Log. 98,5 $=$ 1,9934362,

also Log. Sin. (112° 16′ + B) $=$ 9,8025796
$=$ Log. Sin. 39° 23′.

4) Der Winkel A hat 112° 16′, deßwegen ist A + B nicht = 39° 23′, und dieser letztere gefundene Winkel ist das Supplement zur Summe der Winkel von A und B, und also, da der gefundene Sinus negativ ist,
112° 16′ + B entweder = 180° + 39° 23′ = 219° 23′,
oder = 360° — 39° 23′ = 320° 37′;
im ersten Falle wäre B = (A + B) — A = 219° 23′ — 112° 16′ = 107° 7′, und im zweiten Falle wäre B = (A + B) — A = 320° 37′ — 112° 16′ = 208° 21′.

5) Weil es endlich, etwa aus einem vorliegenden beiläufigen Grundrisse, schon zum Voraus bekannt sein muß, ob der gesuchte Winkel hohl, oder erhaben ist, und in diesem Beispiele die Figur schon vorhanden ist (II. §. 157. Auflös. Nro. 2.), so weiß man, daß der Winkel B hohl, und daher = 107° 7′ ist.

6) Aus den Winkeln A, B, *D*, E und F suche man den anderen unbekannten Winkel C nach §. 20.; es ist C = 2R(n — 2) — (A + B + D + E + F) = 720° — 571° 39′ = 148° 21′.

7) Die unbekannte Seite A*F* ist jetzt nach dem I. Zusatze des vorigen §., da alle übrigen Seiten, und alle Winkel bekannt sind,

= f = a . Cos. A — b . *C*os. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) — d . Cos. (A + B + *C* + D) + e . Cos. (A + B + C + D + E); oder auch

f = a . *C*os. A — b . *C*os. (A + B) + e . Cos. *F* — d × Cos. (*F* + E) + c . Cos. (F + E + D).

Nun ist nach §. 11.

a . Cos. A =	....	— 43,2
— b . Cos. (A + B) =		76,1
+ c . Cos. (A . . + *C*) =		54,5
— d . Cos. (A . . + D) =		44,6
+ e . Cos. (A . . . + E) =		21,999

also AF = f = 197,199 — 43,2
= 153,999 . . ., somit beinahe = 154.

Nach der zweiten, zur Berechnung der unbekannten Seite angeführten Formel ist in Gemäßheit des nämlichen §. 11.

a . Cos. A = ... — 43,2
— b . Cos. (A + B) = 76,1
+ e . Cos. F = 21,999
— d . Cos. (F + E) = 44,6
+ c . Cos. (F + E + D) = 54,5

also $AF = f = 197,199 - 43,2 = 153,999 \ldots$, mithin wieder beinahe = 154.

Daher ist der Winkel B = 107° 7′, dann der andere Winkel C = 148° 21′, und die Seite f = 154.

II. Auflösung:

1) Man suche für das Eck, oder den Winkel B die zweifache Ordinate (§. 6. Nro. 3.); es ist

Bm = a . Sin. A, und

Bm = e . Sin. F — d . Sin. (F + E) + c . Sin. (F + E + D) — b . Sin. (F + E + D + C),

also a . Sin. A = e . Sin. F — d . Sin. (F + E) + c × Sin. (F + E + D) — b . Sin. (F + E + D + C),

und $\text{Sin.}(F+E+D+C) = (e \cdot \text{Sin. } F - d \cdot \text{Sin.}(F + E) + c \cdot \text{Sin.}(F+E+D) - a \cdot \text{Sin. } A) : b.$

2) Nach §. 11., und in Betreff der vorigen Auflösung ist

e . Sin. F = 98,421
— d . Sin. (F + E) = 76,9985
+ c . Sin. (F + E + D) = ... — 7,40095
— a . Sin. A = ... — 105,499

die ganze Summe ist = 175,4195 — 112,89995 = 62,51955,

mithin ist $\text{Sin.}(F+E+D+C) = \text{Sin.}(352° 16' + C) = \frac{62,51955}{b} \times r = \text{Sin. } 39° 23'.$

3) Da die Summe der Winkel F + E + D = 352° 16′, und der Sinus von der Summe der Winkel (F + E + D) + C positiv ist, so kann diese Summe nicht = 39° 23′, und auch nicht = 140° 37′ sein, wenn man nämlich den Winkel 39° 23′ als das Supplement von 140° 37′, und (F + E + D) + C = 140° 37′ setzen würde; deßhalb ist (F + E + D) + C = 352° 16′ + C

$= 360° + 39° 23' = 399° 23' = 4R + 39° 23'$, oder diese Summe ist $= 6R - 39° 23' = 540° - 39° 23' = 500° 37'$.

Im ersten Falle wäre $(F + E + D) + C = 399° 23'$, also $C = 399° 23' - 352° 16' = 47° 7'$, und im zweiten Falle wäre $(F + E + D) + C = 500° 37'$, also $C = 500° 37' - 352° 16' = 148° 21'$.

3) Weil es endlich zum Voraus bekannt sein muß, ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf ist, und in diesem Beispiele derselbe stumpf ist, so ist $C = 148° 21'$.

4) Auf die nämliche Weise, wie es bei der vorigen Auflösung geschehen ist, suche man den anderen Winkel B, und die Seite f; es ist $B = 107° 7'$, und f ist beinahe $= 154$.

Anmerkung: 1) Ich habe bei der ersten Auflösung dieser Aufgabe die einzelnen Produkte auch genauer durch mehrere Dezimalen ausgedrückt, man wird aber bemerken, daß sich dabei nur eine unmerkliche Differenz ergeben hat.

2) Nimmt man bei der vorstehenden zweiten Auflösung den Winkel von $39° 23'$ als das Supplement von $140° 37'$, so ist $C = -211° 39'$, und man muß diesen Winkel von $360°$ abziehen, um den Winkel C zu finden, indem der wahre Winkel $C = 360° - 211° 39' = 148° 21'$, und aus dem gefundenen negativen Werthe des Winkels C erkannt wird, daß man das Supplement auf sechs, und nicht auf zwei rechte Winkel hätte beziehen sollen.

§. 35.

III. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur eine Seite und zwei Winkel zu berechnen, wenn alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, und die beiden gesuchten Winkel weder an der unbekannten Seite anliegen, noch an einer anderen Seite unmittelbar auf einander folgen.

Auflösung:

1) Man verbinde die beiden unbekannten Winkel durch eine Diagonallinie, so kann diese eine zweifache Lage haben; sie kann

entweder ganz innerhalb der gegebenen Figur, oder
ganz, oder zum Theile außerhalb derselben liegen.

2) Liegt die Diagonal, welche die beiden unbekannten Winkel verbindet, ganz innerhalb der Figur, so zerfällt

a) diese in zwei andere Figuren, bei welchen alle Stücke bekannt sind, bis auf eine Seite und zwei Winkel, die entweder dieser Seite anliegen, oder derselben nicht anliegen, aber doch unmittelbar auf einander folgen;

b) Diese Seiten, und jedesmal die zwei unbekannten Winkel suche man nach §. 30., oder nach §. 33.;

c) Aus diesen Winkeln ergeben sich auch die beiden, anfangs unbekannt gewesenen Winkel als bekannt, und man hat jetzt bei der ganzen Figur die unbekannte Seite, und die beiden, weder dieser Seite anliegenden, noch unmittelbar auf einander folgenden Winkel gefunden.

3) Wenn die Diagonal, welche die beiden unbekannten Winkel verbindet, zum Theile, oder ganz außerhalb der Figur fällt, so entstehen

a) einzelne Figuren, welche durch gebrochene, in sich selbst zurückkehrende, und sich auch manchmal durchschneidende Linien begränzt werden;

b) Bei diesen suche man, indeß aber mit genauer Rücksicht auf die Beschaffenheit der trigonometrischen Linien, und auf die Lage sowohl der anfangs gegebenen, als auch der durch die gezogene Diagonal entstandenen neuen Winkel, nach §. 30 oder 33. die unbekannten Linien und Winkel, welche letztere den gesuchten Linien anliegen, oder nicht, und in beiden Fällen unmittelbar auf einander folgen;

c) Aus den gefundenen Linien und Winkeln suche man endlich die unbekannten zwei Winkel, und dann die unbekannte Seite, indem man diese letztere als Abszissenlinie annimmt, und vom ersten Punkte aus für das letzte Eck die Abszisse berechnet (§. 6. Nro. 5.).

I. Zusatz: Es seien (*Fig.* 14.) im Sechsecke ABCDFF alle Seiten und Winkel, außer der Seite A*F*, und den beiden Winkeln B und E gegeben, welche weder der unbekannten Seite anliegen, noch sonst unmittelbar auf einander folgen, und es falle die Diagonal BE, welche die unbekannten Winkel B und E verbindet, ganz innerhalb der Figur; dadurch wird diese in zwei Vierecke BCDE und ABEF getheilt, wovon beim ersteren alle Seiten und Winkel, bis auf die Seite BE und die Winkel β und δ, und beim letzteren nur die Seiten AB und E*F*, und die Winkel A und *F* bekannt sind.

Man suche nach der ersten, oder nach der zweiten Auflösung des §. 30. bei der Figur BCDE die unbekannten Stücke. Nach der I. Auflösung ist

$$\text{Tang. } \varepsilon = \frac{c \,.\, \text{Sin. } C - d \,.\, \text{Sin. } (C + D)}{b - c \,.\, \text{Cos. } C + d \,.\, \text{Cos. } (C + D)},$$

dann $\delta = 2R(n-2) - (\beta + C + D)$, und

$$BE = [b - c \,.\, \text{Cos. } C + d \,.\, \text{Cos. } (C + D)] : \text{Cos. } (C + D + \delta).$$

Man nehme ferner die unbekannte Seite A*F* als Abszissenlinie an, und bestimme für den Winkel B oder E die zweifachen Werthe der entsprechenden Ordinate; es ist

$$Bm = a \,.\, \text{Sin. } A, \text{ und}$$
$$Bm = e \,.\, \text{Sin. } F - BE \,.\, \text{Sin. } (F + BEF),$$

also $a \,.\, \text{Sin. } A = e \,.\, \text{Sin. } F - BE \,.\, \text{Sin. } (F + BEF)$,

$$\text{und Sin. } (F + BEF) = \frac{e \,.\, \text{Sin. } F - a \,.\, \text{Sin. } A}{BE}.$$

Ferner ist

$$ABE = 2R(n-2) - (A + F + BEF),$$

dann B oder ABC ist $= \beta + ABE$, und

E oder *FED* ist $= \delta + BEF$.

Endlich ist die gesuchte Seite A*F* oder

$$f = a \,.\, \text{Cos. } A - BE \,.\, \text{Cos. } (A + ABE) - e \times \text{Cos. } (A + ABE + BEF).$$

Nach der II. Auflösung des §. 30. ist

$$BE = \sqrt{[b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \,.\, \text{Cos. } C + 2bd \times \textit{Cos.}\,(C + D) - 2cd \,.\, \textit{Cos.}\, D}$$

, dann

$$\textit{Cos.}\,\beta = [BE^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2cd \,.\, \text{Cos. } D] : 2b \,.\, BE,$$

und $\delta = 2R(n - 2) - (\beta + C + D)$.

Es ist jetzt wieder

$$\text{Sin. } (F + BEF) = \frac{e \,.\, \text{Sin. } F - a \,.\, \text{Sin. } A}{BE},$$

dann $ABE = 2R(n - 2) - (A + F + BEF)$,
und B oder ABC ist $= \beta + ABE$,
wie auch E oder $DEF = \delta + BEF$.

Endlich ist AF oder

$$f = a \,.\, \text{Cos. } A - BE \,.\, \textit{Cos.}\,(A + ABE) + e \times \text{Cos. } (A + ABE + BEF).$$

Oder es ist, wenn man die für BE so eben angeführte Formel benützen will, AF oder

$$f = \sqrt{[a^2 + BE^2 + e^2 - 2a \,.\, BE \,.\, \text{Cos. } ABE + 2ae \times \text{Cos. } (ABE + BEF) - 2e \,.\, BE \,.\, \textit{Cos.}\, BEF]}.$$

II. Zusatz: Es seien (*Fig.* 15.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel, außer der Seite AF und den beiden Winkeln B und E, gegeben, welche weder der unbekannten Seite anliegen, noch sonst unmittelbar auf einander folgen, und es falle die Diagonal BE, welche die unbekannten Winkel B und E mit einander verbindet, zum Theile außerhalb der Figur.

Man bekommt die gebrochene, in sich zurückkehrende Linie BCDE, und das Viereck ABEF.

Bei der ersten Linie ist

$$\text{Tang. } \delta = \frac{c \,.\, \textit{Sin.}\, D - b \,.\, \text{Sin. } (D + C)}{d - c \,.\, \text{Cos. } D + b \,.\, \text{Cos. } (D + C)},$$

$$\text{und Tang. } \mu = \frac{c \,.\, \text{Sin. } C - d \,.\, \text{Sin. } (C + D)}{b - c \,.\, \textit{Cos.}\, C + d \,.\, \text{Cos. } (C + D)}.$$

Will man bei diesen Formeln die inneren Winkel C und D nehmen, und setzt man in dieser Absicht die Bestimmung der Winkel von E gegen D, C und B fort, so ist δ und D hohl, dagegen aber C und μ erhaben, und wenn man die Winkel μ und C hohl

nimmt, und die Winkel von B gegen C, D und E hin bestimmt, so sind die Winkel D und δ erhaben (§. 1.).

Ferner ist $d = c \,.\, \text{Cos. } D - b \,.\, \text{Cos. } (D + C) + BE \,.\, \text{Cos. } (D + C + \mu)$, somit die Diagonal

$$BE = \frac{d - c \,.\, \text{Cos. } D + b \,.\, \text{Cos } (D + C)}{\text{Cos. } (D + C + \mu)}.$$

Nun sind im Vierecke ABEF die Seiten AB und EF oder a und e nebst der Seite BE, und die Winkel A und F bekannt, folglich ist nach §. 30.

$$\text{Sin. } (F + BEF) = \frac{e \,.\, \text{Sin. } F - a \,.\, \text{Sin. } A}{BE},$$

dann der Winkel $ABE = 2R(n - 2) - (A + F + BEF)$, und es ist ABC oder $B = ABE - \mu$, und DEF oder $E = BEF + \delta$.

Endlich ist die unbekannte Seite AF oder

$$f = a \,.\, \text{Cos. } A - BE \,.\, \text{Cos. } (A + ABE) + e \times \text{Cos. } (A + ABE + BEF).$$

Weil $AF = Aq + qF$, so ist auch AF, oder

$$f = a \,.\, \text{Cos. } A - BE \,.\, \text{Cos. } (A + ABE) + e \,.\, \text{Cos. } F.$$

III. Zusatz: Es seien (*Fig.* 16.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel, außer der Seite AF, und den beiden Winkeln B und D, gegeben, welche weder dieser Seite anliegen, noch sonst unmittelbar auf einander folgen, und es falle die Diagonallinie BD, welche diese Winkel verbindet, ganz außerhalb des Vieleckes.

Die Diagonallinie BD theilet das Sechseck in das Fünfeck ABDEF, und in das Dreieck BCD. In diesem Dreiecke weiß man alle Seiten und Winkel bis auf die Diagonal BD, und die beiden anliegenden Winkel β und δ. Hat man diese drei Stücke gefunden, so weiß man im Fünfecke alles bis auf die Seite AF, und die beiden, zwar dieser Seite nicht anliegenden, aber doch unmittelbar auf einander folgenden Winkel ABD und BDE, und aus diesen Winkeln kann man, wie sie nebst der Seite BD gefunden sind, die Winkel ABC und CDE, und die Seite AF finden.

Im Dreiecke ist nach §. 9.
$BD = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \text{Cos. C})}$ (II. §. 115.);
ferner ist nach §. 8.

$$\text{Cos.}\,\beta = \frac{BD^2 + b^2 - c^2}{2BD \,.\, b},$$

$$\text{und Cos.}\,\delta = \frac{BD^2 + c^2 - b^2}{2BD \,.\, c}$$ (II. §. 116.).

Ist auf diese Weise die Seite BD gefunden, so kann man jetzt nach §. 33. im Fünfecke die zwei unbekannten Winkel ABD und BDE nebst der Seite AF berechnen.

Es ist bei der Abszissenlinie AF vom Anfangspunkte A aus die Ordinate

$Bm = a \,.\, \text{Sin. A}$, und es ist auch

$Bm = e \,.\, \text{Sin.}\,F - d \,.\, \text{Sin.}\,(F + E) + BD \times \text{Sin.}\,(F + E + EDB)$,

also $a \,.\, \text{Sin. A} = e \,.\, \text{Sin.}\,F - d \,.\, \text{Sin.}\,(F + E) + BD \times \text{Sin.}\,(F + E + EDB)$,

und $\text{Sin.}\,(F + E + EDB) = \left[a \,.\, \text{Sin. A} - e \,.\, \text{Sin.}\,F + d \times \text{Sin.}\,(F + E)\right] : BD.$

Uiberdieß ist der Winkel

$ABD = 2R(n - 2) - (A + F + E + EDB)$;

und es ist

$AF = a \,.\, \text{Cos. A} - BD \,.\, \text{Cos.}\,(A + ABD) + d \times \text{Cos.}\,(A + ABD + BDE) - e \,.\, \text{Cos.}\,(A + ABD + BDE + E)$.

Bestimmt man, um die Winkel ABD und BDE nebst der Seite AF zu finden, bei der Abszissenlinie AF für das Eck D den zweifachen Werth der Ordinate Dn, so ist

$Dn = e \,.\, \text{Sin.}\,F - d \,.\, \text{Sin.}\,(F + E)$, und es ist

$Dn = a \,.\, \text{Sin. A} - BD \,.\, \text{Sin.}\,(A + ABD)$, also

$a \,.\, \text{Sin. A} - BD \,.\, \text{Sin.}\,(A + ABD) = e \,.\, \text{Sin.}\,F - d \,.\, \text{Sin.}\,(F + E)$, und

$\text{Sin.}\,(A + ABD) = \left[a \,.\, \text{Sin. A} - e \,.\, \text{Sin.}\,F + d \times \text{Sin.}\,(F + E)\right] : BD.$

In diesem Falle ist dann, da man den Winkel ABD

ABD zuerst findet, der Winkel $BDE = 2R(n-2) - (A + F + E + ABD)$, und es ist

$$AF = Fn + An = e \,.\, \text{Cos.}\, F - d \,.\, \text{Cos.}\,(F + E) + a \,.\, \text{Cos.}\, A - BD \,.\, \text{Cos.}\,(A + ABD).$$

Hat man nach einer dieser zwei Auflösungsmethoden auch die Winkel ABD und BDE, so ergeben sich jetzt die zwei unbekannten Winkel des Sechseckes.

Es ist der Winkel ABC oder $B = ABD - \beta$, und der Winkel CDE oder D ist $= BDE - \delta$.

Will man endlich aus den gefundenen Winkeln B und D die Seite AF finden, so ist diese nach §. 4., oder

$$f = a \,.\, \text{Cos.}\, A - b \,.\, \text{Cos.}\,(A + B) + c \,.\, \text{Cos.}\,(A + B + C) - d \,.\, \text{Cos.}\,(A + B + C + D) + e \,.\, \text{Cos.}\,(A + B + C + D + E).$$

IV. Zusatz: Nach den vorstehenden Auflösungen muß man auch bei der Aufgabe dieses §. aus den Zeichen der trigonometrischen Linien, und aus der Beschaffenheit der Figuren erkennen, in welchem Halbkreise, und in welchem Quadranten die gesuchten Winkel liegen; weßhalb eine geradlinigte ebene Figur ebenfalls nicht unmittelbar bestimmt ist, wenn alle Seiten und Winkel gegeben sind, außer einer Seite und zwei Winkeln, welche an der unbekannten Seite nicht anliegen, und auch an keiner anderen Seite unmittelbar auf einander folgen (§. 33. Zus. II.).

Anmerkung: 1) Wenn man (Fig. 16.) im Dreiecke BCD, und im Fünfecke ABDEF den zweiten unbekannten Winkel nicht nach §. 20., sondern nach §. 8., oder nach §. 33. berechnet, so ergibt sich gleich eine Winkelprobe. Der hohle Winkel C muß mit dem hohlen Winkel β und $\delta = 2R = 180°$ sein (I. §. 43.), und die fünf Winkel des Fünfeckes sind $= 2R(n-2) = 180° \,.\, 3 = 540°$ (I. §. 53.).

2) Beim Dreiecke BCD (Fig. 16), wo jeder Winkel kleiner ist als 2R, hat man immer lauter hohle Winkel (I. §. 28. Zus. II.), und beim Fünfecke findet man nach §. 1., daß ebenfalls nur hohle Winkel vorkommen.

3) Es ist bequem, wenn man bei der Berechnung die Formeln so wählt, daß gleiche Ausdrücke vorkommen, damit man die schon berechneten Resultate wieder benützen kann; und wo die Glieder nur dadurch ver-

schieden sind, daß darin der Sinus oder Kosinus vorkommt, kann man allemal zwei solche Glieder zugleich berechnen, wie es im §. 11. bei der II. Auflösung geschehen ist.

4) Die als Abszissenlinie angenommene Seite AF kann, wenn alle übrigen Stücke bekannt sind, auch dadurch berechnet werden, daß man den Punkt F als Anfangspunkt annimmt, und für das Eck A die Abszisse sucht (§. 6. Nro. 2.).

§. 36.

Beispiel für den ersten Fall der Aufgabe des §. 35.

Es seien (Fig. 14.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel, außer der Seite AF oder f und den Winkeln *B* und E, bekannt, und es haben die ersteren folgende Größe:

Größe der Seiten.
$$\begin{cases} a = 114, \\ b = 98{,}5, \\ c = 55, \\ d = 89, \\ e = 100{,}85; \end{cases}$$

Größe der Winkel.
$$\begin{cases} A = 112^\circ\ 16', \\ C = 148^\circ\ 21', \\ D = 112^\circ\ 22', \\ F = 77^\circ\ 24'. \end{cases}$$

Auflösung:

1) Man verbinde die unbekannten Winkel B und E durch die Diagonal BE, es fällt diese ganz innerhalb der Figur.

2) Nach dem 1. Zusatze des vorigen §. ist

$$\text{Tang. } \beta = \frac{c \,.\, \text{Sin. C} - d \,.\, \textit{Sin.}\,(C + D)}{b - c \,.\, \textit{Cos.}\, C + d \,.\, \textit{Cos.}\,(C + D)}.$$

Nun ist

$$\begin{array}{rl} c \,.\, \text{Sin. } C = & 28{,}8601 \\ -\, d \,.\, \textit{Sin.}\,(C + D) = & 87{,}8343 \\ \hline \text{der ganze Zähler ist} = & 116{,}6944; \end{array}$$

dann ist

$$\begin{array}{rl} b = & 98{,}5 \\ -\, c \,.\, \text{Cos. C} = & 46{,}8198 \\ +\, d \,.\, \text{Cos.}\,(C + D) = & \ldots\ldots\ -\,14{,}3572 \\ \hline \text{der ganze Nenner ist} = & 145{,}3198 - 14{,}3572 \\ = & 130{,}9626. \end{array}$$

Indem der Winkel C = 148° 21′, somit Sin. C = Sin. 31° 39′, und Cos. C = — Cos. 31° 39′; dann C + D = 260° 43′, also Sin. (C + D) = — Sin. 80° 43′, und Cos. (C + D) = — Cos. (C + D); und überdieß

L. c = L. 55 = 1,7403627,	Log. 55 = 1,7403627,
L. Sin. 31° 39′ = 9,7199350 — 10,	L. Cos. 31° 39′ = 9,9300670 — 10,
= 1,4602977	= 1,6704297
= L. 28,8601, also + 28,8601;	= L. 46,8198, also + 46,8198.
L. d = L. 89 = 1,9493900,	Log. 89 = 1,9493900,
L. Sin. 80° 43′ = 9,9942743 — 10,	L. Cos. 80° 43′ = 9,2076795 — 10,
= 1,9436643	= 1,1570695
= L. 87,8343, also + 87,8343;	= L. 14,3572, also — 14,3572.

2) Daher ist Tang. $\beta = \frac{r \cdot 116{,}6944}{130{,}9626}$;

Log. (r . 116,6944) = 12,0670500
Log. 130,9626 = 2,1171473

Log. Tang. β = 9,9499027

= Log. Tang. 41° 42′ 9″, also β = 41° 42′ 9″, indem diese Tangens positiv ist, und es zum Voraus bekannt sein muß, daß der gesuchte Winkel β nur hohl sein kann.

4) Im Vierecke BCDE ist jetzt der andere unbekannte Winkel δ = 360° — (β + C + D) = 360° — (41° 42′ 9″ + 148° 21′ + 112° 22′) = 360° — 302° 25′ 9″ = 57° 34′ 51″ (I. §. 46.), und

$$BE = [b - c \cdot Cos.\, C + d \cdot Cos.\, (C + D)] : Cos.\, (C + D + \delta).$$

Nun ist	b =	98,5
— c . Cos. C =		16,8198
+ d . Cos. (C + D) =	...	— 14,3572
der Dividend ist =	145,3198	— 14,3572
	= 130,9626,	

und der Divisor Cos. (C + D + δ) ist = Cos. 318° 17′ 51″ = Cos. 41° 42′ 9″.

Ferner ist

Log. 130,9626 = 2,1171473
Log. Cos. 41° 42′ 9″ = 9,8730933 — 10

also Log. BE = 2,2440540

5) Man berechne jetzt die unbekannten Stücke des Viereckes ABEF; es ist nach dem 1. Zusatze des vorigen §.

$$\text{Sin.}(F + BEF) = \frac{e \,.\, \text{Sin. F} - a \,.\, \text{Sin. A}}{BE}.$$

e . Sin. F = 98,421
— a . Sin. A = — 105,499

also e . Sin. F — a . Sin. A = — 7,078,

$$\text{und Sin.}(F + BEF) = -\frac{r \,.\, 7{,}078}{BE}.$$

Log. (r . 7,078) = 10,8499106
Log. BE = 2,2440540

Log. Sin. (F + BEF) = 8,6058566
= Log. Sin. 2° 18′ 45″.

6) Da der Sinus negativ ist, so ist
$F + BEF = 180° + 2° 18′ 45″ = 182° 18′ 45″$, oder
$F + BEF = 360° - 2° 18′ 45″ = 357° 41′ 15″$.

Im ersten Falle wäre BEF = 182° 18′ 45″ — 77° 24′ = 104° 54′ 45″, und im zweiten Falle wäre BEF = 357° 41′ 15″ — 77° 24′ = 280° 17′ 15″.

Es ist aber der gesuchte Winkel BEF hohl (§. 1.), deßwegen ist dieser = 104° 54′ 45″, und der Winkel E oder DEF ist = BEF + δ = 104° 54′ 45″ + 57° 34′ 51″ = 162° 29′ 36″.

7) Aus den Winkeln A, F und BEF berechne man den Winkel ABE, es ist dieser = 360° — (A + F + BEF = 360° — 294° 34′ 45″ = 65° 25′ 15″, und es ist der Winkel ABC oder B = ABE + β = 65° 25′ 15″ + 41° 42′ 9″ = 107° 7′ 24″.

8) Endlich bestimme man im Vierecke ABEF die Seite AF, es ist (§. 35. Zus. 1.)

$$f = a \,.\, \text{Cos. } A - BE \,.\, \text{Cos.}(A + ABE) + e \times \text{Cos.}(A + ABE + BEF).$$

Nun ist a . Cos. A = ... — 43,2
— BE . Cos.(A + ABE) = 175,266
+ e . Cos. (A + ABE + BEF) = 21,999

also AF oder f = 197,265 — 43,2
= 154,065

Es ist also der Winkel ABC oder B = 107° 7′ 24″, dann der Winkel DEF oder E = 162° 29′ 36″, und AF oder f = 154,065; oder es ist, wenn man die Größe der Winkel nur bis auf Minuten ausdrückt, der Winkel B = 107° 7′, und E = 162° 30′, während die Seite f beinahe = 154, indem man in diesem Falle 7′ anstatt 7′ 24″, und 30′ anstatt 29′ 36″ setzt.

§. 37.

Beispiel für den zweiten Fall der Aufgabe des §. 35.

Es seien (Fig. 15.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel, außer der Seite AF oder f und den Winkeln B und E, gegeben, und es haben die ersteren folgende Größe:

Größe der Seiten: a = 164, b = 85,6, c = 110,5, d = 77, e = 151;

Größe der Winkel: A = 54° 47′, C = 259° 20′, D = 94° 7′, F = 66° 38′.

Auflösung:

1) Man verbinde die unbekannten Winkel B und E durch die Diagonallinie *BE*; es fällt diese zum Theile innerhalb, und zum Theile außerhalb der Figur.

2) Nach dem II. Zusatze des §. 35. ist

$$\text{Tang. } \mu = \frac{c \,.\, \text{Sin. C} - d \,.\, \text{Sin.}(C + D)}{b - c \,.\, \text{Cos. C} + d \,.\, \text{Cos.}(C + D)}.$$

Nun ist C = 259° 20′, und Sin. C = — Sin. 79° 20′, wie auch Cos. C = — Cos. 79° 20′; dann C + D = 259° 20′ + 94° 7′ = 353° 27′, und Sin. (C

$+ D) = -$ Sin. 6° 33′, wie auch Cos. (C $+ D$) = Cos. 6° 33′.

L.c = L.110,5 = 2,0433623,	Log. 110,5 = 2,0433623,
Log. Sin. C = 9,9924301 − 10,	Log. Cos. C = 9,2673945 − 10,
= 2,0357924	= 1,3107568
= L. 108,59, also − 108,59;	= L. 20,453, also + 20,453.

L. d = L. 77 = 1,8864907,	Log. d = 1,8864907,
L. Sin. (C + D) = 9,0571723 − 10,	L. Cos. (C + D) = 9,9971559 − 10,
= 0,9436630	= 1,8836466
= L. 8,7834, also + 8,7834;	= L. 76,497, also + 76,497.

Deßwegen ist

c . Sin. C = ... − 108,59

− d . Sin. (C + D) = 8,7834

c . Sin. C + d . Sin. (C + D) = 8,7834 − 108,59

= − 99,8066.

b = 85,6

− c . Cos. C = 20,453

+ d . Cos. (C + D) = 76,497

also b − c . Cos. C + . . . = 182,55;

und Tang. $\mu = -\frac{99{,}8066}{182{,}55} \times$ r.

Log. (99,8066 × r) = 11,9991593,

Log. 182,55 = 2,2613818,

also Log. Tang. μ = 9,7377775

= Log. Tang. 28° 40′; und es ist, da der Winkel μ erhaben, und die Tangens negativ ist, der Winkel μ = 360° − 28° 40′ = 331° 20′.

3) Uiberdieß ist

$$\text{Tang. } \delta = \frac{\text{c . Sin. } D - \text{b . Sin. } (C + D)}{\text{d} - \text{c . Cos. D} + \text{b . Cos. } (C + D)}.$$

Der Winkel D ist = 94° 7′, also Sin. D = Sin. 85° 53′, und Cos. D = − Cos. 85° 53′.

L.c = L.110,5 = 2,0433623,	Log. 110,5 = 2,0433623,
Log. Sin. D = 9,9988780 − 10,	Log. Cos. D = 8,8560493 − 10,
= 2,0422403	= 0,8994116
= L. 110,215, also + 110,215;	= L. 7,93253, also + 7,93253.

L. b = L. 85,6 = 1,9324738,
L. Sin. (C + D) = 9,0571723 — 10,
= 0,9896461
= L. 9,76439, also + 9,76439;

L. b = L. 85,6 = 1,9324738,
L. Cos. (C + D) = 9,9971559 — 10,
= 1,9296297
= L. 85,0413, also + 85,0413.

c . Sin. D = 110,215
— b . Sin. (C + D) = 9,76439
c . Sin. D — b . Sin. (C + D) = 119,97939;

d = 77
— c . Cos. D = 7,93253
+ b . Cos. (C + D) = 85,0413
d — c . Cos. D + . . . = 169,97383;

mithin ist Tang. $\delta = \frac{119,97939}{169,97383} \times r.$

Log. (119,97939 × r) = 12,0791067,
Log. 169,97383 = 2,2303795,

folglich Log. Tang. δ = 9,8487272
= Log. Tang. 35° 13′ 2″.

Da der Winkel δ hohl, und die Tangens positiv ist, so ist δ = 35° 13′ 2″.

4) Aus dem schon berechneten Winkel μ kann jetzt die Diagonal BE gefunden werden; es ist nach dem II. Zusatze des §. 35.

$$BE = \frac{d - c \,.\, Cos.\, D + b \,.\, Cos.\, (C + D)}{Cos.\, (C + D + \mu)}.$$

Der Winkel C ist = 259° 20′, dann D ist = 94° 7′, und μ ist = 331° 20′, also ist (C + D + μ) = 684° 47′, und Cos. (C + D + μ) = Cos. 35° 13′; man subtrahirt nämlich 360° von dieser Summe, und sucht zu 324° 47′ das Supplement (II. §. 82.).

Nach Nro. 3. ist d — c . Cos. D + b . Cos. (C + D) = 169,97383; nun ist

Log. 169,97383 = 2,2303795,
dann Log. Cos. (C + D + μ) = 9,9122099 — 10,
also Log. BE = 2,3181696
= Log. 208,051, weßhalb die Diagonal BE = 208,051.

5) Hat man auf diese Weise die Linie BE gefunden, so kann der Winkel BEF berechnet werden.

Es ist nach dem II. Zusatze des §. 35.

$$\text{Sin. (F} + \text{BEF)} = \frac{\text{e . Sin. F} - \text{a . Sin. A}}{\text{BE}}.$$

Nun ist e . Sin. F = + 138,61
und — a . Sin. A = — 134,

also e . Sin. F — a . Sin. A = + 4,61; und

$$\text{Sin. (F} + \text{BEF)} = \frac{4{,}61 \times \text{r}}{208{,}051}.$$

Log. (4,61 × r) = 10,6637009,
Log. *BE* = Log. 208,051 = 2,3181696,

also Log. Sin. (F + *BEF*) = 8,3455313
= Log. Sin. 1° 16′ 10″.

Da der Sinus positiv ist, so ist F + BEF = 1° 16′ 10″, oder = 180° — 1° 16′ 10″ = 178° 43′ 50″; der erste Werth ist unmöglich, weil sonst der Winkel negativ sein müßte, daher ist F + B*E*F = 178° 43′ 50″, und BEF = (F + *BE*F) — F = 178° 43′ 50″ — 66° 38′ = 112° 5′ 50″.

6) Aus den Winkeln δ und B*E*F läßt sich der Winkel *DE*F oder *E* finden, es ist dieser = 35° 13′ 2″ + 112° 5′ 50″ = 147° 18′ 52″; und aus diesem Winkel, und den gegebenen Winkeln A, C, *D* und F kann man den anderen unbekannten Winkel *AB*C oder *B* finden, im Falle man nicht im Vierecke ABEF aus den Winkeln A, F und BEF den Winkel AB*E* (I. §. 46.), und mittels dieses Winkels, und des hohlen Winkels μ den Winkel *B* finden will (§. 20.).

Es ist *B* = 2R(n — 2) — (A + C + *D* + *E* + F) = 720° — 622° 10′ 52″ = 97° 49′ 8″, und ABE = 126° 29′ 40″.

7) Endlich suche man die unbekannte Seite AF oder f; es ist nach dem II. Zusatze des §. 35.

f = a . Cos. A — B*E* . Cos. (*A* + A*BE*) + e × Cos. (A + A*BE* + BEF),

oder es ist auch

f = a . Cos. *A* — B*E* . Cos. (A + *A*B*E*) + e . Cos. F.

Nun ist $a \cdot Cos. A = 94{,}574$
$- BE \cdot Cos. (A + ABE) = 208,$
$+ e \cdot Cos. F = 59{,}889$

also AF oder $f = 362{,}463.$

Es ist daher der Winkel ABC oder $B = 97° 49' 8''$, dann der Winkel DEF oder $E = 147° 18' 52''$, und die Seite $f = 362{,}463$, oder es ist beinahe $B = 97° 49'$, dann $E = 147° 19'$, und $f = 362{,}5$.

§. 38.

Beispiel für den dritten Fall der Aufgabe des §. 35.

Es seien (Fig. 16.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel, außer der Seite AF oder f und den Winkeln B und D, gegeben, welche letztere weder an der unbekannten Seite anliegen, noch sonst unmittelbar auf einander folgen, aber durch eine Diagonallinie verbunden werden, die ganz außerhalb des Vieleckes fällt, und es haben die bekannten Seiten und Winkel folgende Größe:

Größe der Seiten. $a = 164,$ $b = 85{,}6,$ $c = 110{,}5,$ $d = 77,$ $e = 151;$

Größe der Winkel. $A = 54° 47',$ $C = 259° 20',$ $E = 147° 19',$ $F = 66° 38'.$

Auflösung:

1) Wenn man die Scheitelpunkte der beiden unbekannten Winkel B und D durch die Diagonallinie BD verbindet, so bekommt man das Dreieck BCD, und das Fünfeck ABDEF.

2) Im Dreiecke BCD, wo allemal nur hohle Winkel vorkommen (§. 1. und 1. §. 28. Zus. II.), ist nebst den Seiten BC und CD oder b und c auch der eingeschlossene Winkel BCD bekannt, indem man diesen erhält, wenn man den erhabenen Winkel $C = 259° 20'$ von 360° abzieht (I. §. 11. Zus. V.); es ist der hohle Winkel $C = 360° - 259° 20' = 100° 40'$, und dazu ist der Winkel mit 79° 20' das Supplement, weßhalb $Cos. C = - Cos. 79° 20'$.

3) Weil der hohle Dreieckswinkel = 100° 40′, also stumpf ist, so sind die beiden anderen Dreieckswinkel β und δ spitzig (I. §. 28. Zus. IV.), und es ist nach dem III. Zusatze des §. 35. die Diagonal

$$BD = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \text{Cos. } C)},$$

$$\text{dann Cos. } \beta = \frac{BD^2 + b^2 - c^2}{2BD \,.\, b},$$

$$\text{und Cos. } \delta = \frac{BD^2 + c^2 - b^2}{2BD \,.\, c}.$$

4) Nun ist

$$\begin{array}{rl} & b^2 = 7327{,}36, \\ & c^2 = 12210{,}25, \\ -\,2bc \,.\, \text{Cos. } C = & 3501{,}55, \\ \hline \text{also } BD^2 = & 23039{,}16, \end{array}$$

und Log. $BD^2 = 4{,}3624666$,
folglich Log. $BD = 2{,}1812333 =$ Log. 151,786,
und BD ist = 151,786.

Ferner ist

$$\begin{array}{rl} BD^2 = & 23039{,}16 \\ +\,b^2 = & 7327{,}36 \\ \hline BD^2 + b^2 = & 30366{,}52 \\ -\,c^2 = & -\,12210{,}25 \\ \hline BD^2 + b^2 - c^2 = & 18156{,}27; \end{array}$$

dann Log. $BD = 2{,}1812333$,
Log. $2 = 0{,}3010300$,
Log. $b =$ Log. $85{,}6 = 1{,}9324738$,

Log. $(2BD \,.\, b) = 4{,}4147371$.

Log. $(18156{,}27 \times r) = 14{,}2590267$,
Log. $(2BD \,.\, b) = 4{,}4147371$,

also Log. Cos. $\beta = 9{,}8442896$
= Log. Cos. 45° 40′ 39″, weßhalb $\beta = 45°\ 40'\ 39''$.

5) Ferner ist

$$\begin{array}{rl} BD^2 = & 23039{,}16, \\ c^2 = & 12210{,}25, \\ \hline BD^2 + c^2 = & 35249{,}41 \\ -\,b^2 = & -\,7327{,}36, \\ \hline BD^2 + c^2 - b^2 = & 27922{,}05; \end{array}$$

dann ist

$$\text{Log. BD} = 2{,}1812333,$$
$$\text{Log. 2} = 0{,}3010300,$$
$$\text{Log. c} = \text{Log. } 110{,}5 = 2{,}0433623,$$
$$\text{Log. } (2BD \,.\, \text{c}) = 4{,}5256256.$$

$$\text{Log. } (27922{,}05 \times \text{r}) = 14{,}4459473,$$
$$\text{Log. } (2\text{BD} \,.\, \text{c}) = 4{,}5256256,$$
$$\text{Log. } Cos.\ \delta = 9{,}9203217$$
$$= \text{Log. Cos. } 33^\circ\ 39'\ 22'', \text{ und } \delta = 33^\circ\ 39'\ 22''.$$

6) Da im Dreiecke BCD die Winkel β und δ aus den gegebenen Seiten b und c, und der berechneten Seite BD gefunden wurden, und der hohle Winkel BCD durch den erhabenen Winkel C bekannt ist, und die Summe dieser drei Winkel, das ist, $\beta + \text{C} + \delta = 45^\circ\ 40'\ 39'' + 100^\circ\ 40' + 33^\circ\ 39'\ 22'' = 180^\circ\ 0'\ 1''$, somit beinahe $= 180^\circ$, so ersieht man, daß die zwei Winkel β und δ gehörig berechnet sind (§. 35. Anmerk. 1.).

7) Im Fünfecke ABDEF sind außer der Seite AF oder f, und den beiden, unmittelbar auf einander folgenden Winkeln ABD und BDE alle Stücke bekannt, und es ist nach dem III. Zusatze des §. 35.

$$\text{Sin. } (\text{A} + \text{AB}D) = [\text{a} \,.\, \text{Sin. A} - \text{e} \,.\, \text{Sin. F} + \text{d} \times \text{Sin. } (\text{F} + \text{E})] : BD,$$

dann der Winkel $BDE = 2\text{R}(\text{n} - 2) - (A + \text{F} + \text{E} + \text{AB}D)$, und

$$\text{AF} = \text{a} \,.\, \text{Cos. A} - BD \,.\, Cos.\ (\text{A} + \text{AB}D) + \text{e} \times Cos.\ \text{F} - \text{d} \,.\, \text{Cos. } (\text{F} + \text{E}).$$

8) Der Winkel A ist $= 54^\circ\ 47'$, und $\text{F} = 66^\circ\ 38'$, also $\text{Sin. A} = Sin.\ 54^\circ\ 47'$, und $\text{Sin. F} = Sin.\ 66^\circ\ 38'$; ferner ist $\text{F} + E = 213^\circ\ 57'$, und $Sin.\ (\text{F} + \text{E}) = -\text{Sin. } 33^\circ\ 57'$, wie auch $Cos.\ (\text{F} + \text{E}) = -\text{Cos. } 33^\circ\ 57'$.

9) Uiberdieß ist

$\text{a} = 164$, dann $\text{A} = 54^\circ\ 47'$;

L. a = L. 164 = 2,2148438,
Log. Sin. A = 9,9122099 — 10,
= 2,1270537
= Log. 133,984;

Log. a = 2,2148438,
Log. Cos. A = 9,7609274 — 10,
= 1,9757712
= Log. 94,574.

e = 151, F = 66° 38';

Log. e = 2,1789769,
Log. Sin. F = 9,9628358 — 10,
= 2,1418127
= Log. 138,616;

Log. e = 2,1789769,
Log. Cos. F = 9,5983679 — 10,
= 1,7773448
= Log. 59,889.

d = 77, F + E = 213° 57', Supplem. Winkel = 33° 57'.

Log. d = L. 77 = 1,8864907,
L. Sin 33°57' = 9,7469992 — 10,
= 1,6334899
= Log. 43,0021;

Log. d = 1,8864907,
L. Cos. 33°57' = 9,9188296 — 10,
= 1,8053203
= Log. 63,8734.

a . Sin. A = 133,984
— e . Sin. F = ... — 138,616
+ d . Sin. (F + E) = ... — 43,0021

= 133,984 — 181,6181
= — 47,6341, und

$$\text{Log. Sin. } (A + ABD) = - \frac{47{,}6341 \times r}{BD}.$$

Log. (47,6341 × r) = 11,6779180,
Log. BD = 2,1812333,

Log. Sin. (A + ABD) = 9,4966847
= Log. Sin. 18° 17' 23".

Weil der Sinus negativ ist, so ist A + ABD = 180° + 18° 17' 23" = 198° 17' 23", oder = 360° — 18° 17' 23" = 341° 42' 37". Im ersten Falle wäre der Winkel ABD = (A + ABD) — A = 198° 17' 23" — 54° 47' = 143° 30' 23", und im zweiten Falle wäre ABD = (A + ABD) — A = 341° 42' 37" — 54° 47' = 286° 55' 37".

Es muß aber zum Voraus bekannt sein, daß der gesuchte Winkel ABD hohl ist; deßwegen ist dieser = 143° 30' 23".

10) Aus den Winkeln A, ABD, E und F kann

man jetzt den Winkel BDE finden, und daraus ergeben sich die beiden gesuchten Winkel B und D.

Es ist $BDE = 2R(n-2) - (A + ABD + E + F) = 540° - 412° 14' 23'' = 127° 45' 37''$, und der Winkel ABC oder $B = ABD - \beta = 143° 30' 23'' - 45° 40' 39'' = 97° 49' 44''$, wie auch CDE oder $D = BDE - \delta = 127° 45' 37'' - 33° 39' 22'' = 94° 6' 15''$.

11) Endlich ist nach Nro. 7 und 9.

$$\begin{aligned} a \,.\, \text{Cos. } A &= 94{,}574 \\ -BD \,.\, \text{Cos. } (A + ABD) &= 144{,}108 \\ e \,.\, \text{Cos. } F &= 59{,}889 \\ -d \,.\, \text{Cos. } (F + E) &= 63{,}8734 \end{aligned}$$

---

also AF oder $f = 362{,}4444$.

Es ist demnach beinahe der Winkel $B = 97° 49' 44''$, dann der Winkel $D = 94° 6' 15''$, und die Seite $f = 362{,}4444$.

Anmerkung: Durch die in diesem Abschnitte angeführten drei Aufgaben (§. 30., §. 33. und §. 35.) ist nach den vorkommenden verschiedenen Fällen auch die Aufgabe gelöst worden, bei einer geradlinigten ebenen Figur aus allen bekannten Seiten und allen Winkeln, mit Ausnahme zweier noch nicht bekannter Winkel, diese letzten zu finden, sie mögen unmittelbar auf einander folgen, oder nicht; aus diesem Grunde habe ich auch früherhin jene Aufgabe nicht besonders erörtert, und bei der Bestimmung zweier Winkel zugleich auch eine Seite als unbekannt angenommen.

Folgen nämlich die beiden unbekannten Winkel unmittelbar auf einander, so berechnet man sie nach den in den §§. 30 und 33. angegebenen Vorschriften; und folgen dieselben nicht unmittelbar auf einander, so geschieht ihre Berechnung nach den im §. 35. für die drei möglichen Fälle angeführten Auflösungen.

IV. Abschnitt.

Bestimmung dreier Winkel bei geradlinigten ebenen Figuren, und überhaupt bei gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linien.

§. 39.

I. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur drei unmittelbar auf einander folgende Winkel zu finden, wenn alle übrigen Winkel, und alle Seiten der Figur bekannt sind.

Auflösung:

1) Es seien (Fig. 17.) im Sechsecke ABCDEF alle Seiten und alle Winkel, außer den drei unmittelbar auf einander folgenden Winkeln A, F und *E*, bekannt;

2) Nach dem im §. 8. aufgestellten Lehrsatze kann man den Kosinus des mittleren Winkels F berechnen, ohne daß die beiden anderen Winkel A und *E* bekannt sind, im Falle man zum Voraus weiß, ob der gesuchte Winkel hohl, oder erhaben ist; es ist

$$\begin{aligned}\text{Cos. } F = \big[& e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab \\ & \times \text{Cos. } B - 2ac \,.\, \text{Cos. } (B + C) + 2ad \\ & \times \text{Cos. } (B + C + D) + 2bc \,.\, \text{Cos. } C - 2bd \\ & \times \text{Cos. } (C + D) + 2cd \,.\, \text{Cos. } D \big] : 2ef.\end{aligned}$$

3) Die Scheitelpunkte der beiden, noch unbekannten Winkel verbinde man durch die Diagonallinie *AE*, es wird das Vieleck in das Dreieck AFE, und in das Fünfeck ABCDE abgetheilt;

4) Im Dreiecke AFE sind die Seiten f und e nebst dem eingeschlossenen Winkel F bekannt; daher ist nach §. 7.

$$\text{Tang. } \beta = \frac{e \,.\, \text{Sin. F}}{f - e \,.\, \text{Cos. F}};$$

5) Aus den Winkeln F und β ergibt sich der Winkel γ, es ist $\gamma = 2R - (F + \beta)$; würde man ohne Rücksicht auf den Winkel β den Winkel γ suchen, so ergäbe sich, da $\beta + \gamma + F = 180°$ (I. §. 43.), eine Winkelprobe, und es wäre

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{f \text{ . Sin. F}}{e - f \text{ . Cos. F}};$$

6) Im Fünfecke weiß man mit Ausnahme der Seite AE und der anliegenden Winkel δ und ε alle Seiten und alle Winkel; es ist da nach §. 8.

$$\text{Tang. } \delta = (b \text{ . Sin. } B - c \text{ . Sin. } (B + C) + d \text{ . Sin. } (B + C + D)) : (a - b \text{ . Cos. B} + c \text{ . Cos. } (B + C) - d \text{ . Cos. } (B + C + D));$$

7) Wollte man den Winkel ε, welcher $= 2R(n-2) - (\delta + B + C + D)$, aus den bekannten Winkeln δ, B, C und D nicht berechnen, so wäre

$$\text{Tang. } \varepsilon = (c \text{ . Sin. D} - b \text{ . Sin. } (D + C) + a \times \text{Sin. } (D + C + B)) : (d - c \text{ . Cos. } D + b \times \text{Cos. } (D + C) - a \text{ . Cos. } (D + C + B)).$$

8) Aus den Winkeln β, δ, ε und γ kann man die Winkel A und F finden; es ist der Winkel BAF oder $A = \beta + \delta$, und DEF oder $E = \varepsilon + \gamma$.

I. Zusatz: Aus den nämlichen Gründen kann man, wenn alle übrigen Stücke bekannt sind, drei unmittelbar auf einander folgende Winkel finden, wenn unter den unbekannten auch erhabene Winkel begriffen sind.

Sind (Fig. 18.) im Vierecke ABCD alle vier Seiten und der Winkel B bekannt, und man soll die drei unmittelbar auf einander folgenden Winkel A, D und C berechnen, von welchen der Winkel D erhaben ist, und man zieht die Diagonal AC, so weiß man in den Dreiecken ABC und ADC allemal zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel; es ist (§. 7. und §. 8.)

$$\text{Cos. } D = (d^2 + c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \text{ . Cos. B}) : 2cd;$$ dann

$$\text{Tang. } \beta = \frac{c \text{ . Sin. } D}{d - c \text{ . Cos. } D},$$ ferner

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{d \text{ . Sin. } D}{c - d \text{ . Cos } D},$$ überdieß

$$\text{Tang. BAC} = \frac{b \text{ . Sin. B}}{a - b \text{ . Cos. B}},$$ und

$$\text{Tang. BCA} = \frac{a \text{ . Sin. B}}{b - a \text{ . Cos. B}}.$$

Aus diesen Winkeln findet man die beiden anderen Viereckswinkel A und C; es ist BAD oder A = BAC $- \beta$, und BCD oder C = BCA $- \gamma$.

II. Zusatz: Nach der nämlichen Auflösung kann man auch bei einer jeden gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden und in der nämlichen Ebene liegenden Linie drei unmittelbar auf einander folgende Winkel finden, wenn alle übrigen Winkel, und alle einzelnen Theile der gebrochenen Linie bekannt sind.

Es seien (Fig. 19.) bei der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie ABCDEFA die einzelnen Theile AB, BC, CD, DE, EF und AF nebst den Winkeln A, B und C bekannt, und deßhalb die übrigen drei, unmittelbar auf einander folgenden Winkel D, E und F unbekannt, und man verbinde die zwei Winkel D und F durch die gerade Linie DF, während man den Winkel EDF mit β, den Winkel AFE mit γ, und den Winkel DFA mit δ bezeichnet. Man erhält das Dreieck DEF, und die gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie ABCDFA.

Bei der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie ABCDFA weiß man alle Stücke, außer der Linie DF und den anliegenden Winkeln δ und CDF, daher ist nach dem im §. 7. aufgestellten Lehrsatze

Tang.

Tang. δ = (a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C)) : (f — a . Cos. A + b . Cos. (A + B) — c . Cos. (A + B + C)); dann

Tang. CDF = (b . Sin. C — a . Sin. (C + B) + f × Sin. (C + B + A)) : (c — b . Cos. C + a × Cos. (C + B) — f . Cos. (C + B + A)),

und f = a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) — DF . Cos. (A + B + C + CDF), folglich

DF = (a . Cos. A — b . Cos. (A + B) + c . Cos. (A + B + C) — f) : Cos. (A + B + C + CDF).

Im Dreiecke *DEF* weiß man jetzt alle drei Seiten, aus diesen berechne man die drei Winkel ε, β und DFE (II. §. 122.), und es ergeben sich die drei gesuchten Winkel der gebrochenen Linie. Es ist nämlich der hohle Winkel *CDE* oder D = CDF — β, und der hohle Winkel AF*E* = DF*E* — δ, weßhalb der erhabene Winkel F = 360° — AFE = 360° — (*DFE* — δ) = 360° + δ — DF*E*, und der erhabene Winkel *E* ist = 360° — *DEF*.

III. Zusatz: Bei den, in diesem §. angeführten, und im §. 43. vorkommenden Auflösungen muß man wieder aus den Zeichen der trigonometrischen Linien, und aus der Beschaffenheit der Figuren, und der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linien erkennen, in welchem Halbkreise, und in welchem Quadranten die gesuchten Winkel liegen; deßwegen ist eine geradlinigte ebene Figur, und überhaupt eine gebrochene, in sich selbst zurückkehrende und in der nämlichen Ebene liegende Linie durch alle Winkel, und durch alle Seiten oder einzelne Linien, außer drei unmittelbar, oder auch nicht unmittelbar auf einander folgenden Winkeln, ebenfalls unmittelbar noch nicht bestimmt oder gegeben (§. 35. Zus. IV.).

§. 40.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 39.

Es seien (Fig. 17.) im Sechsecke ABCDEF alle

Seiten und alle Winkel, außer den drei unmittelbar auf einander folgenden Winkeln *A*, F und *E* bekannt, und es haben die gegebenen Stücke folgende Größe:

B = 97° 49′, a = 164, d = 77,
C = 259° 20′, b = 85,6, e = 151,
D = 94° 7′; c = 110,5, f = 362,5.

Auflösung:

1) Man verbinde den ersten und letzten der drei unbekannten Winkel, somit die Winkel A und *E* durch die Diagonallinie A*E*, und bezeichne die neuen Winkel bei A mit β und δ, und bei *E* mit ε und γ;

2) Nach Vorschrift des vorigen §. berechne man den Winkel F, es ist nach §. 8.

$$\text{Cos. F} = (e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab \times \text{Cos.B} - 2ac \,.\, \text{Cos.}(B + C) + 2ad \,.\, \text{Cos.}(B + C + D) + 2bc \,.\, \text{Cos. C} - 2bd \,.\, \text{Cos.}(C + D) + 2cd \,.\, \text{Cos. } D) : 2ef.$$

3) Nun ist der Winkel B = 97° 49′, also Sin. B = Sin. 82° 11′, und Cos. B = — Cos. 82° 11′.

4) Die Winkel B + C sind = 357° 9′, also Sin. (B + C) = — Sin. 2° 51′, und Cos. (B + C) = Cos. 2° 51′.

5) Die Winkel B + C + *D* sind = 451° 16′, also Sin. (B + C + D) = Sin. 88° 44′, und Cos. (B + C + *D*) = — Cos. 88° 44′.

6) Der Winkel C ist = 259° 20′, also Sin. C = — Sin. 79° 20′, und Cos. C = — Cos. 79° 20′.

7) Die Winkel C + *D* sind = 353° 27′, also Sin. (C + *D*) = — Sin. 6° 33′, und Cos. (C + *D*) = Cos. 6° 33′.

8) Der Winkel *D* ist = 94° 7′, also Sin. *D* = Sin. 85° 53′, und Cos. *D* = — 85° 53′.

9) Berechnet man die einzelnen Glieder der bei Nro. 2. angeführten Gleichung, so erhält man

$+ e^2 = 22801,$
$+ f^2 = 131406,25$
$- a^2 = \ldots - 26896$
$- b^2 = \ldots - 7327,96$
$- c^2 = \ldots - 12210,25$
$- d^2 = \ldots - 5929,$
$+ 2ab \cdot \text{Cos. } B = \ldots - 3818,55$
$- 2ac \cdot \text{Cos.}(B+C) = \ldots - 36199,2$
$+ 2ad \cdot \text{Cos.}(B+C+D) = \ldots - 558,302$
$+ 2bc \cdot \text{Cos. } C = \ldots - 3501,55$
$- 2bd \cdot \text{Cos.}(C+D) = \ldots - 13096,4$
$+ 2cd \cdot \text{Cos. } D = \ldots - 1221,61$

Summe $= 154207,25 - 110758,222$
$= 43449,028$; folglich ist

$$\text{Cos. } F = \frac{43449,028}{2ef} \times r.$$

Nun ist Log. $(43449,028 \times r) = 14,6379801,$
und Log. $(2e \times f) = 5,0393149,$

also Log. Cos. $F = 9,5986652$
$=$ Log. Cos. $66^\circ\ 37'$; weßhalb der Winkel AFE oder $F = 66^\circ\ 37'$, indem der Kosinus positiv ist, und man zum Voraus wissen muß, daß der gesuchte Winkel F hohl ist.

9) Aus dem gefundenen Winkel F, und den beiden gegebenen Seiten e und f suche man die beiden Dreieckswinkel β und γ; es ist nach §. 39. Nro. 4 und 5.

$$\text{Tang. } \beta = \frac{e \cdot \text{Sin. } F}{f - e \cdot \text{Cos. } F}, \text{ und}$$

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{f \cdot \text{Sin. } F}{e - f \cdot \text{Cos. } F};$$

oder es ist auch $\gamma = 180^\circ - (F + \beta)$.

Nun ist Log. $(e \cdot \text{Sin. } F \cdot r) = 12,1417581,$
und Log. $(f - e \cdot \text{Cos. } F) = 2,4808276,$

also Log. Tang. $\beta = 9,6609305$
$=$ Log. Tang. $24^\circ\ 36'\ 41''$, und $\beta = 24^\circ\ 36'\ 41''$.

Ferner ist $\gamma = 180° - \beta - F = 180° - 91°$ 13' 41" $= 88°$ 46' 19".

10) Im Fünfecke berechne man jetzt den Winkel δ; es ist nach §. 39. Nro. 6.

$$\text{Tang. } \delta = [b \,.\, \text{Sin. B} - c \,.\, \text{Sin. (B + C)} + d \times \text{Sin. (B + C + D)}] : (a - b \,.\, \text{Cos. B} + c \times \text{Cos. (B + C)} - d \,.\, \text{Cos. (B + C + D)}).$$

Mit Rücksicht auf Nro. 3 — 5. berechne man die einzelnen Glieder dieser Gleichung; es ist

b . Sin. B =	84,804
— c . Sin. (B + C) =	5,4942
+ d . Sin. (B + C + D) =	76,981
mithin der Dividend	= 167,2792.

Ferner ist

a =	164
— b . Cos. B =	11,642
+ c . Cos. (B + C) =	110,363
— d . Cos. (B + C + D) =	1,701
folglich ist der Divisor	= 287,706.

Daher ist $\text{Tang. } \delta = \frac{167{,}2792}{287{,}706} \times r$;

$$\text{Log. } (167{,}2792 \times r) = 12{,}2234419,$$

und $\text{Log. } 287{,}706 = 2{,}4589490,$

also $\text{Log. Tang. } \delta = 9{,}7644929$

$=$ Log. Tang. 30° 10' 29", und $\delta = 30°$ 10' 29".

11) Im Fünfecke ABCDE ist jetzt, da vier Winkel bekannt sind, der fünfte Winkel oder $\varepsilon = 2R(n - 2) - (\delta + B + C + D) = 540° - (30°$ 10' 29" + 97° 49' + 259° 20' + 94° 7') $= 540° - 481°$ 26' 29" $= 58°$ 33' 31".

12) Aus den gefundenen Winkeln β, γ, δ und ε lassen sich die beiden übrigen gesuchten Winkel bestimmen; es ist der Winkel A oder BAF $= \beta + \delta$, und E oder $DEF = \gamma + \varepsilon$, mithin $A = 24°$ 36' 41" + 30° 10' 29" $= 54°$ 47' 10", und $E = 88°$ 46' 19" + 58° 33' 31" $= 147°$ 19' 50".

Es ist demnach beinahe der Winkel A = 54° 47′ 10″, dann F = 66° 37′, und E = 147° 19′ 50″.

§. 41.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 39.

Es seien (Fig. 18.) im Vierecke ABCD die drei unmittelbar auf einander folgenden Winkel A, D und E, von welchen der mittlere erhaben ist, unbekannt, und es haben die bekannten Stücke, die vier Seiten und der vierte Winkel, folgende Größe:

a = 230, b = 220, c = 150, d = 160,
und der Winkel ABC oder B = 72° 30′.

Auflösung:

1) Man verbinde die Winkel A und C durch die Diagonallinie AC, man erhält die beiden Dreiecke ABC und ADC;

2) Man berechne zuerst den mittleren, erhabenen Winkel ADC; es ist

$$\text{Cos. D} = (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \,.\, \text{Cos. B}) : 2cd.$$

Nun ist

c^2 =	22500
d^2 =	25600
$-a^2$ = ...	— 52900
$-b^2$ = ...	— 48400
$+ 2ab \,.\, \text{Cos. B}$ =	30431,4
der Dividend =	78531,4 — 101300
=	— 22768,6;

und Log. (22768,6 × r) = 14,3573364,
dann Log. (2c × d) = 4,6812413,

also Log. Cos. D = 9,6760951
= Log. Cos. 61° 41′, und der spitzige Winkel D ist = 61° 41′.

3) Da der Kosinus des Winkels D negativ, und der gesuchte Viereckswinkel D oder ADC erhaben ist, so liegt dieser im dritten Quadranten, und es ist der erhabene Winkel D = 180° + 61° 41′ = 241° 41′.

4) Nach dem I. Zusatze des §. 39. ist

$$\text{Tang. } \beta = \frac{c \,.\, \text{Sin. D}}{d - c \,.\, \text{Cos. D}} = \text{Tang. } 29^\circ\, 44'\, 17'',$$

$$\text{dann Tang. } \gamma = \frac{d \,.\, \text{Sin. D}}{c - d \,.\, \text{Cos. D}} = \text{Tang. } 31^\circ\, 56'\, 43'',$$

$$\text{ferner Tang. BAC} = \frac{b \,.\, \text{Sin. B}}{a - b \,.\, \text{Cos. B}} = \text{Tang. } 52^\circ\, 51'',$$

$$\text{und Tang. BCA} = \frac{a \,.\, \text{Sin. B}}{b - a \,.\, \text{Cos. B}} = \text{Tang. } 55^\circ\, 29'\, 9'';$$

mithin $\beta = 29^\circ\ 44'\ 17''$, dann $\gamma = 31^\circ\ 56'\ 43''$, ferner $\text{BAC} = 52^\circ\ 51''$, und $\text{BCA} = 55^\circ\ 29'\ 9''$.

5) Aus diesen gefundenen Winkeln kann man jetzt die beiden noch übrigen unbekannten Winkel berechnen; es ist der Viereckswinkel BAD oder $\text{A} = \text{BAC} - \beta = 52^\circ\ 51' - 29^\circ\ 44'\ 17'' = 22^\circ\ 16'\ 34''$, und der Winkel BC*D* oder *C* ist $= \text{BC}A - \gamma = 55^\circ\ 29'\ 9'' - 31^\circ\ 56'\ 43'' = 23^\circ\ 32'\ 26''$.

Dadurch sind jetzt alle drei Winkel gefunden; indem B*AD* oder $\text{A} = 22^\circ\ 16'\ 34''$, dann A*D*C oder $\text{D} = 241^\circ\ 41'$, und *BCD* oder $\text{C} = 23^\circ\ 32'\ 26''$.

6) Bringt man bei den Dreiecken ABC und A*DC* jedesmal die drei bekannten Winkel in eine Summe, so ist diese $= 180^\circ$ (I. §. 43.), und addirt man die vier Winkel des Viereckes ABCD, so betragen diese zusammen 360° (I. §. 46.), woraus ersichtlich ist, daß sich bei der Berechnung der Winkel kein bedeutender Fehler eingeschlichen hat.

§. 42.

III. Beispiel zur Aufgabe des §. 39.

Man soll (*Fig.* 19.) bei der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden und in der nämlichen Ebene liegenden Linie ABCDEFA die drei unmittelbar auf einander folgenden Winkel D, E und F berechnen, wenn alle übrigen Stücke bekannt sind, und diese folgende Größe haben:

Die bekannten Linien. AB = a = 92, BC = b = 182, CD = c = 242, DE = d = 290, EF = e = 164, AF = f = 372,311;

Die bekannten Winkel. BAF = A = 71° 1′, ABC = B = 43° 11′, BCD = C = 320° 8′.

Auflösung:

1) Man ziehe von D nach F die gerade Linie DF, und berechne den Winkel DFA oder δ; es ist (§. 39. Zus. II.)

Tang. $\delta = [a . \text{Sin. } A - b . \text{Sin. } (A + B) + c . \text{Sin. } (A + B + C)] : [f - a . \text{Cos. } A + b . \text{Cos. } (A + B) - c . \text{Cos. } (A + B + C)]$.

Nun ist (§. 16.)

a . Sin. A = 86,997
− b . Sin. (A + B) = ... − 166,
+ c . Sin. (A + B + C) = 233,009

also der Dividend = 320,006 − 166
= 154,006.

Ferner ist (§. 16.)

f = 372,311
− a . Cos. A = ... − 29,927
+ b . Cos. (A + B) = ... − 74,606
− c . Cos. (A + B + C) = ... − 65,35

mithin der Divisor = 372,311 − 169,883
= 202,428;

daher ist Tang. $\delta = \frac{154,006}{202,428} \times r$.

Uiberdieß ist

Log. (154,006 × r) = 12,1875376,
und Log. 202,428 = 2,3062706,

also Log. Tang. δ = 9,8812670
= Log. Tang. 37° 15′ 49″, somit δ = 37° 15′ 49″.

2) Nun berechne man den Winkel CDF, es ist (§. 39. Zus. II.)

Tang. $CDF = [b . \text{Sin. } C - a . \text{Sin. } (C + B) + f$

$\times$ Sin. (C + B + A)] : [c — b . Cos. C + a $\times$ Cos. (C + B) — f . Cos. (C + B + A)].

3) Der Winkel C ist = 320° 8′, also Sin. C = — Sin. 39° 52′, und Cos. C = Cos. 39° 52′.

4) Die Winkel C + B sind = 363° 19′, also Sin. (C + B) = Sin. 3° 19′, und Cos. (C + B) = Cos. 3° 19′.

5) Die Winkel (C + B + A) sind = 434° 20′, also Sin. (C + B + A) = Sin. 74° 20′, und Cos. (C + B + A) = Cos. 74° 20′.

6) Nun ist

b . Sin. C = ... — 116,662
— a . Sin. (C + B) = ... — 5,3226
+ f . Sin. (C + B + A) = 358,48

also der Dividend = 358,48 — 121,9846
= 236,4954.

Ferner ist

c = 242,
— b . Cos. C = ... — 139,692
+ a . Cos. (C + B) = 91,8459
— f . Cos. (C + B + A) = ... — 100,539

mithin der Divisor = 333,8459 — 240,231
= 93,6149.

Uiberdieß ist

Log. (236,4954 $\times$ r) = 12,3738227
und Log. 93,6149 = 1,9713449

also Log. Tang. CDF = 10,4024778
= Log. Tang. 68° 24′ 15″, und CDF = 68° 24′ 15″.

7) Man berechne jetzt die Seite DF, es ist (§. 39. Zus. II.)

$DF = (a . \text{Cos. } A - b . \text{Cos. } (A + B) + c . \text{Cos. } (A + B + C) - f) : \text{Cos. } (A + B + C + CDF)$.

Die Summe der Winkel A + B + C + CDF ist = 502° 44′ 15″, dazu, vielmehr zu 142° 44′ 15″, ist das Supplement 37° 15′ 45″, weßhalb Cos. (A + B C + CDF) = — Cos. 37° 15′ 45″.

Nun ist (§. 16.)

$$a \,.\, \text{Cos. } A = 29{,}927$$
$$-b \,.\, \text{Cos. } (A + B) = 74{,}606$$
$$+c \,.\, \text{Cos. } (A + B + C) = 65{,}35$$
$$f = \ldots\ldots -372{,}311$$

also $a \,.\, \text{Cos.} A - b \,.\, \text{Cos.} (A + B) + \ldots = 169{,}883 - 372{,}311$

$$= -202{,}428, \text{ und } cDF = \frac{-202{,}428}{-\text{Cos.}(A + B + C + CDF)}$$

$$= \frac{202{,}428}{\text{Cos.}(A + B + C + CDF)} = \frac{202{,}428}{\text{Cos. } 37^\circ\ 15'\ 45''};$$

Ferner ist

$$\text{Log. } 202{,}428 = 2{,}3062706,$$
$$\text{und Log. } Cos.\ 37^\circ\ 15'\ 45'' = 9{,}9008421 - 10,$$

mithin Log. $DF = 2{,}4054285$
$=$ Log. $254{,}348$, und $DF = 254{,}348$.

8) Da DF gefunden ist, so lassen sich im Dreiecke DFE aus den drei bekannten Seiten $DE = 290$, dann $EF = 164$, und $DF = 254{,}348$ die drei Winkel E, DFE und β berechnen (II. §. 122 und 127.).

Es ist, wenn man mittels der polygonometrischen Lehrsätze die Winkel suchen will, nach §. 8.

$$\text{Cos. DFE} = \frac{DF^2 + FE^2 - DE^2}{2 \,.\, FE \,.\, DF},$$

$$\text{dann Cos. } \beta = \frac{DF^2 + DE^2 - EF^2}{2 \,.\, DF \,.\, DE},$$

$$\text{und } Cos.\ E = \frac{EF^2 + DE^2 - DF^2}{2 \,.\, EF \,.\, DE}.$$

$DF^2 + EF^2 - DE^2$ ist $= 7489$,
dann $DF^2 + DE^2 - EF^2 = 121897$,
und $EF^2 + DE^2 - DF^2 = 46303$.

$$\text{Log. } (7489 \times r) = 13{,}8744238,$$
$$\text{Log. } (2FE \times DF) = 4{,}9213023,$$

also Log. Cos. DEF $= 8{,}9531215$
$=$ Log. Cos. $84^\circ\ 51'$, und DFE $= 84^\circ\ 51'$.

Log. (121897 × r) = 15,0859930,
Log. (2DF × DE) = 5,1688561,

also Log. Cos. β = 9,9171369
= Log. Cos. 34° 16′ 47″, und β = 34° 16′ 47″;

Log. (46303 × r) = 14,6656091,
Log. (2EF × DE) = 4,9782718,

also Log. Cos. E = 9,6873373
= Log. Cos. 60° 52′ 14″, und E = 60° 52′ 14″.

Es ist demnach der Dreiecswinkel DFE = 84° 51′, dann der Winkel β ist = 34° 16′ 47″, ferner E = 60° 52′ 14″′ und die Summe dieser drei Winkel ist = 180° 1″, somit beinahe = 180° (I. §. 43.).

9) Aus diesen drei gefundenen Winkeln, und aus den bei Nro. 1. und bei Nro. 2 — 6. berechneten Winkeln lassen sich die drei gesuchten Winkel bestimmen.

Der hohle Winkel CDE oder D ist = CDF — β = 68° 24′ 15″ — 34° 16′ 47″ = 34° 7′ 28″, dann der erhabene Winkel DEF oder E ist = 360° — 60° 52′ 14″ = 299° 7′ 46″, ferner der hohle Winkel AFE ist = DFE — δ = 84° 51′ — 37° 15′ 49″ = 47° 35′ 11″, und der erhabene Winkel AFE oder F ist = 360° — 47° 35′ 11″ = 312° 24′ 49″.

§. 43.

II. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur drei Winkel zu finden, wenn diese nicht unmittelbar auf einander folgen, und alle übrigen Winkel, und alle Seiten der Figur bekannt sind.

Auflösung:

1) Man verbinde die drei unbekannten Winkel durch gerade Linien, um ein Dreieck zu erhalten, welches diese Linien zu Seiten hat;

2) Uiber jede dieser Dreiecksseiten entsteht eine geradlinigte ebene Figur, oder eine gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie, bei welchen alle Winkel,

und alle Seiten oder einzelnen Linien bekannt sind, mit Ausnahme der jedesmaligen Dreiecksseite und der beiden, ihr anliegenden Winkel; diese letzteren suche man nach den im §. 30. angegebenen Auflösungen;

3) Dadurch werden auch die drei Dreiecksseiten bekannt, aus welchen dann die drei Dreieckswinkel nach §. 8. berechnet werden können;

4) Sowohl aus diesen drei Winkeln, als auch aus den vorhin gefundenen Winkeln lassen sich endlich die drei gesuchten Winkel der geradlinigten ebenen Figur finden.

I. Zusatz: Es seien (*Fig.* 20.) im Sechsecke ABDCDEF, welches lauter hohle Winkel hat, alle Seiten und Winkel bekannt, außer den Winkeln A, D und F, die nicht alle drei unmittelbar auf einander folgen, von welchen aber doch zwei Winkel, nämlich A und F, an der nämlichen Seite anliegen.

Man verbinde diese drei Winkel noch durch die zwei Diagonalen AD und DF, und man erhält sowohl das Dreieck ADF, als auch die geradlinigten ebenen Figuren ABCD und DEF, bei welchen jedesmal alle Seiten und Winkel bekannt sind, außer den Dreiecksseiten AD und DF, und den ihnen anliegenden Winkeln β, γ, ε und φ.

Nach §. 7. ist, wenn man beim Vierecke ABCD die drei unbekannten Stücke sucht, wie es durch die im §. 30. angegebenen Auflösungen geschehen ist,

$$\text{Tang.}\,\beta = \frac{b\,.\,\text{Sin.}\,B - c\,.\,\text{Sin.}\,(B + C)}{a - b\,.\,\text{Cos.}\,B + c\,.\,\text{Cos.}\,(B + C)},$$

dann $\gamma = 2R(n - 2) - (B + C + \beta)$, oder

$$\text{Tang.}\,\gamma = \frac{b\,.\,\text{Sin.}\,C - a\,.\,\text{Sin.}\,(C + B)}{c - b\,.\,\text{Cos.}\,C + a\,.\,\text{Cos.}\,(C + B)},$$

und nach §. 9. ist

$$AD = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\,.\,\text{Cos.}\,B + 2ac \times \text{Cos.}\,(B + C) - 2bc\,.\,\text{Cos.}\,C)};$$

oder es ist auch $b\,.\,\text{Cos.}\,B - c\,.\,\text{Cos.}\,(B + C) + AD \times \text{Cos.}\,(B + C + \gamma) = a$,

mithin $AD = \frac{a - b \,.\, \text{Cos.}\, B + c \,.\, \text{Cos.}\,(B + C)}{\text{Cos.}\,(B + C + \gamma)}$.

Im Dreiecke DEF ist nach den nämlichen Lehrsätzen

$$\text{Tang.}\,\varepsilon = \frac{e \,.\, \text{Sin.}\, E}{d - e \,.\, \text{Cos.}\, E}, \text{ dann}$$

$$\varphi = 2R(n - 2) - (E + \varepsilon), \text{ oder}$$

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{d \,.\, \text{Sin.}\, E}{e - d \,.\, \text{Cos.}\, E}, \text{ und}$$

$$DF = \sqrt{(d^2 + e^2 - 2de \,.\, \text{Cos.}\, E)}.$$

Endlich bestimme man nach §. 8. im Dreiecke ADF, in welchem jetzt alle drei Seiten bekannt sind, die drei Winkel α, δ und μ, es ist

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{AF^2 + AD^2 - DF^2}{2 \,.\, AF \,.\, AD}, \text{ dann}$$

$$\text{Cos.}\,\delta = \frac{AD^2 + DF^2 - AF^2}{2 \,.\, AD \,.\, DF}, \text{ und}$$

$$\text{Cos.}\,\mu = \frac{AF^2 + DF^2 - AD^2}{2 \,.\, AF \,.\, DF}.$$

Aus diesen, und aus den vorhin berechneten Winkeln ergeben sich die drei gesuchten Winkel des Vieleckes. Es ist der Winkel ABF oder $A = \alpha + \beta$, dann der Winkel CDE oder D ist $= \gamma + \delta + \varepsilon$, und der Winkel AFE oder F ist $= \mu + \varphi$.

II. Zusatz: Man suche (Fig. 21.) im Siebenecke ABCDEFG, in welchem nicht lauter hohle Winkel vorkommen, die drei hohlen Winkel A, C und F, wovon keiner unmittelbar auf den anderen folgt, im Falle alle übrigen Winkel und alle Seiten der Figur bekannt sind.

Man verbinde die drei unbekannten Winkel durch die Diagonallinien AC, CF und AF; man erhält nebst dem Dreiecke ACF die geradlinigten ebenen Figuren ABC und AGF, und die gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie CDEFC, bei welchen alle-

mal außer der Dreiecksseite, und den ihr anliegenden zwei Winkeln alle übrigen Winkel, und alle übrigen Seiten oder einzelnen Linien bekannt sind.

Im Dreiecke ABC ist nach den angeführten Lehrsätzen

$$\text{Tang. } x = \frac{b \,.\, \text{Sin. B}}{a - b \,.\, \text{Cos. B}}, \text{ dann}$$

$$\delta = 2R(n - 2) - (B + \alpha), \text{ oder}$$

$$\text{Tang. } \delta = \frac{a \,.\, \text{Sin. B}}{b - a \,.\, \text{Cos. B}}, \text{ und}$$

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. B})};$$

oder es ist auch $b \,.\, \text{Cos. B} - CA \,.\, \text{Cos.}(B + \delta) = a$,

$$\text{mithin } AC = \frac{b \,.\, \text{Cos. B} - a}{\text{Cos. } (B + \delta)}.$$

Im Dreiecke AGF ist

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{f \,.\, \text{Sin. G}}{g - f \,.\, \text{Cos. G}}, \text{ dann}$$

$$\omega = 2R(n - 2) - (G + \gamma), \text{ oder}$$

$$\text{Tang. } \omega = \frac{g \,.\, \text{Sin. G}}{f - g \,.\, \text{Cos. G}}, \text{ und}$$

$$AF = \sqrt{(g^2 + f^2 - 2fg \,.\, \text{Cos. G})};$$

oder es ist auch $g \,.\, \text{Cos. G} - AF \,.\, \text{Cos.}(G + \gamma) = f$,

$$\text{mithin } AF = \frac{g \,.\, \text{Cos. G} - f}{\text{Cos. } (G + \gamma)}.$$

Bei der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie CDEFC ist

$$\text{Tang. } \mu = (d \,.\, \text{Sin. D} - e \,.\, \text{Sin. } (D + E)) : (c - d \,.\, \text{Cos. D} + e \,.\, \text{Cos. } (D + E)),$$

$$\text{dann Tang. } \nu = (d \,.\, \text{Sin. E} - c \,.\, \text{Sin. } (E + D)) : (e - d \,.\, \text{Cos. E} + c \,.\, \text{Cos. } (E + D)),$$

$$\text{und } e = d \,.\, \text{Cos. E} - c \,.\, \text{Cos. } (E + D) + CF \times \text{Cos. } (E + D + \mu),$$

$$\text{mithin } CF = \frac{e - d \,.\, \text{Cos. E} + c \,.\, \text{Cos. } (E + D)}{\text{Cos. } (E + D + \mu)}.$$

Im Dreiecke ACF ist jetzt nach §. 8.

$$\text{Cos. } \beta = \frac{AC^2 + AF^2 - CF^2}{2 \cdot AC \cdot AF}, \text{ dann}$$

$$\text{Cos. ACF} = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2 \cdot AC \cdot CF}, \text{ und}$$

$$\text{Cos. } \varphi = \frac{CF^2 + AF^2 - AC^2}{2 \cdot CF \cdot AF}.$$

Aus diesen, und den vorhin gefundenen Winkeln suche man die drei unbekannten Winkel des Vieleckes. Es ist der Winkel BAG oder $A = \alpha + \beta + \nu$, dann BCD oder $C = \delta + \varepsilon = \delta + ACF - \mu$, und EFG oder $F = \nu + \varphi + \omega$.

III. Zusatz: Man suche (Fig. 22.) im Sechsecke ABCDEF die drei Winkel A, C und F, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, wenn unter den gesuchten Winkeln auch erhabene Winkel vorkommen, und alle übrigen Winkel nebst allen Seiten bekannt sind.

Man verbinde die drei unbekannten Winkel A, C und F noch durch die Diagonalen AC und CF; es entstehet das Dreieck ACF sammt den geradlinigten ebenen Figuren ABC und CDEF, bei welchen außer der jedesmaligen Dreiecksseite und den ihr anliegenden Winkeln alle übrigen Winkel und Seiten gegeben sind.

Im Dreiecke ABC ist wieder

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{b \cdot \text{Sin. B}}{a - b \cdot \text{Cos. B}}, \text{ dann}$$

$$\gamma = 2R(n - 2) - (B + \alpha), \text{ oder}$$

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{a \cdot \text{Sin. B}}{b - a \cdot \text{Cos. B}}, \text{ und}$$

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos. B})};$$

oder es ist auch $b \cdot \text{Cos. B} - AC \cdot \text{Cos.}(B + \gamma) = a$,

mithin $AC = \frac{b \cdot \text{Cos. B} - a}{\text{Cos.}(B + \gamma)}$.

Im Vierecke CDEF ist

$$\text{Tang. } \varepsilon = (d \cdot \text{Sin. } D - e \cdot \text{Sin. } (D + E)) : (c - d \times \text{Cos. } D + e \cdot \text{Cos. } (D + E)),$$

dann $\mu = 2R(n - 2) - (\varepsilon + D + E)$, oder

$$\text{Tang. } \mu = (d \cdot \text{Sin. } E - c \cdot \text{Sin. } (E + D)) : (e - d \times \text{Cos. } E + c \cdot \text{Cos. } (E + D)),$$

und $e = d \cdot \text{Cos. } E - c \cdot \text{Cos. } (E + D) + CF \cdot \text{Cos. } (E + D + \varepsilon)$,

mithin $$CF = \frac{e - d \cdot \text{Cos. } E + c \cdot \text{Cos. } (E + D)}{\text{Cos. } (E + D + \varepsilon)};$$

oder es ist nach §. 9. auch

$$CF = \sqrt{(c^2 + d^2 + e^2 - 2cd \cdot \text{Cos. } D + 2ce \times \text{Cos. } (D + E) - 2de \cdot \text{Cos. } E)}.$$

Im Dreiecke ACF kann man aus den gefundenen Seiten AC und CF, und aus der gegebenen Seite AF die drei Winkel β, δ und ν finden. Es ist

$$\text{Cos. } \beta = \frac{AC^2 + AF^2 - CF^2}{2 \cdot AC \cdot AF}, \text{ dann}$$

$$\text{Cos. } \delta = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2 \cdot AC \cdot CF},$$

$$\text{Cos. } \nu = \frac{CF^2 + AF^2 - AC^2}{2 \cdot CF \cdot AF}.$$

Aus diesen, und aus den vorigen Winkeln berechne man endlich die drei gesuchten Winkel des Vieleckes. Es ist der Winkel BAF oder $A = \alpha + \beta$, dann der Winkel BCD oder C ist $= \gamma + \delta + \varepsilon$, und der Winkel EFA oder F ist $= \mu + \nu$.

§. 44.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 43.

Man soll (Fig. 20.) im Sechsecke ABCDEF von lauter hohlen Winkeln die drei Winkel A, D und F finden, von welchen zwar nicht alle, aber doch zwei unmittelbar auf einander folgen, wenn alle übrigen Winkel, und alle Seiten bekannt sind, und die gegebenen Stücke folgende Größe haben;

Die bekannten Seiten. { a = 114, b = 98,5, c = 55, d = 89, e = 100,85, f = 154;

Die bekannten Winkel. { B = 107° 7', C = 148° 21', E = 162° 30'.

Auflösung:

1) Man verbinde die unbekannten Winkel noch durch die Diagonalen AD und DF, und bezeichne die neuen Winkel mit Buchstaben, so daß BAD $= \beta$, CDA $= \gamma$, ADF $= \delta$, FDE $= \varepsilon$, DFE $= \varphi$, und AFD $= \mu$.

2) Der Winkel B ist $= 107° 7'$, also Sin. B $=$ Sin. $72° 53'$, und $Cos.$ B $= -$ Cos. $72° 53'$.

3) Die Winkel B + C sind $= 255° 28'$, also $Sin.$(B + C) $= -$ $Sin.$ $75° 28'$, und Cos. (B + C) $= -$ $Cos.$ $75° 28'$.

4) Der Winkel C ist $= 148° 21'$, also Sin. C $=$ $Sin.$ $31° 39'$, und Cos. $C = -$ Cos. $31° 39'$.

5) Man berechne im Vierecke ABCD die Winkel β und γ; es ist (§. 43. Zus. I.)

$$\text{Tang. } \beta = \frac{b \,.\, Sin.\, B - c \,.\, Sin.\,(B + C)}{a - b \,.\, Cos.\, B + c \,.\, Cos.\,(B + C)},$$

$$\text{und Tang. } \gamma = \frac{b \,.\, Sin.\, C - a \,.\, Sin.\,(C + B)}{c - b \,.\, Cos.\, C + a \,.\, Cos.\,(C + B)}.$$

Nun ist

L. b = L. 98,5 = 1,9934362,	Log. 98,5 = 1,9934362,
L. Sin. $72° 53'$ = 9,9803250 — 10,	L. Cos. $72° 53'$ = 9,4688173 — 10,
= 1,9737612	= 1,4622535
= L. 94,1372, also + 94,1372;	= L. 28,9903, also + 28,9903;

dann

Log. c = L. 55 = 1,7403627,	Log. 55 = 1,7403627,
L. Sin. $75° 28'$ = 9,9858762 — 10,	L. Cos. $75° 28'$ = 9,3995754 — 10,
= 1,7262389	= 1,1399381
= L. 53,2401, also + 53,2401;	= L. 13,8019, also — 13,8019;

fer-

ferner ist

L.b = L.98,5 = 1,9934362,	Log. b = 1,9934362,
L.Sin.31° 39′ = 9,7199350 — 10,	L.Cos.31° 39′ = 9,9300670 — 10,
= 1,7133712	= 1,9235032
= L.51,6858, also + 51,6858;	= Log. 83,85, also + 83,85;

und

L. a = L. 114 = 2,0569049,	Log. a = 2,0569049,
L.Sin.75° 28′ = 9,9858762 — 10,	L.Cos.75° 28′ = 9,3995754 — 10,
= 2,0427811	= 1,4564803
= L. 110,352, also + 110,352;	= L. 28,6075, also — 28,6075.

Es ist demnach

$$\begin{aligned} b \,.\, \text{Sin. } B &= + \;\; 94{,}1372 \\ -\, c \,.\, \text{Sin.}(B + C) &= + \;\; 53{,}2401 \\ &= \;\; 147{,}3773; \end{aligned}$$

dann

$$\begin{aligned} a &= 114, \\ -\, b \,.\, \text{Cos. } B &= \;\; 28{,}9903 \\ +\, c \,.\, \text{Cos.}(B + C) &= \;\; \ldots\ldots - 13{,}8019 \\ &= 142{,}9903 - 13{,}8019 \\ &= 129{,}1884; \end{aligned}$$

überdieß ist

$$\begin{aligned} b \,.\, \text{Sin. } C &= + \;\; 51{,}6858 \\ -\, a \,.\, \text{Sin.}(C + B) &= + 110{,}352 \\ &= \;\; 162{,}0378; \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c &= \;\; 55, \\ -\, b \,.\, \text{Cos. } C &= \;\; 83{,}85 \\ +\, a \,.\, \text{Cos.}(C + B) &= \;\; \ldots\ldots - 28{,}6075 \\ &= 138{,}85 - 28{,}6075 \\ &= 110{,}2425. \end{aligned}$$

Daher ist jetzt

$$\text{Tang. } \beta = \frac{147{,}3773}{129{,}1884} \times r,$$

und

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{162{,}0378}{110{,}2425} \times r.$$

$$\begin{aligned} \text{Log.}(147{,}3773 \times r) &= 12{,}1684307, \\ \text{Log. } 129{,}1884 &= \;\; 2{,}1112235, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \text{Log. Tang. } \beta &= 10{,}0572072 \\ &= \text{Log. Tang. } 48^\circ\, 45'\, 46'', \text{ und } \beta = 48^\circ\, 45'\, 46''. \end{aligned}$$

$$\text{Log.}\,(162{,}0378 \times r) = 12{,}2096169,$$
$$\text{Log.}\,110{,}2425 = 2{,}0423491,$$

$$\text{Log. Tang.}\,\gamma = 10{,}1672678$$

also
$$= \text{Log. Tang.}\,55^\circ\,46'\,14'', \text{ und } \gamma = 55^\circ\,46'\,44''.$$

Die Winkel des Viereckes ABCD, welche theils gegeben waren, theils so eben durch Rechnung gefunden wurden, betragen 360° (I. §. 46.); indem

$$\beta = 48^\circ\,45'\,46'',$$
dann $\gamma = 55^\circ\,46'\,14'',$
ferner $B = 107^\circ\,7',$
und $C = 148^\circ\,21',$

---

also $\beta + \gamma + B + C = 360^\circ.$

6) Man berechne die Diagonallinie AD, es ist (§. 43. Zus. 1.)

$$AD = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\,.\,\text{Cos. B} + 2ac \times \text{Cos. (B + C)} - 2bc\,.\,\text{Cos. C})}.$$

4) Nach §. 32. Nro. 4. ist

$$a^2 = 12996$$
$$b^2 = 9702{,}25$$
$$c^2 = 3025$$
$$-2ab\,.\,\text{Cos. B} = 6609{,}8$$
$$+2ac\,.\,\text{Cos. (B + C)} = \ldots\ldots - 3146{,}82$$
$$-2bc\,.\,\text{Cos. C} = 9223{,}52$$

---

also $AD = \sqrt{(41556{,}57 - 3146{,}82)}$
$= \sqrt{38409{,}75} = 195{,}98.$

7) Man berechne im Dreiecke DEF aus den Seiten d und e, und aus dem Winkel E die Winkel ε und φ, und die Diagonallinie DF; es ist (§. 43. Zus. I.)

$$\text{Tang. } \varepsilon = \frac{e\,.\,\text{Sin. E}}{d - e\,.\,\text{Cos. E}} = \text{Tang. } 9^\circ\,18',$$

$$\text{und Tang. } \varphi = \frac{d\,.\,\text{Sin. E}}{e - d\,.\,\text{Cos. E}} = \text{Tang. } 8^\circ\,12',$$

weßhalb der Winkel $\varepsilon = 9^\circ\,18'$, und $\varphi = 8^\circ\,12'$, wie auch $\varepsilon + E + \varphi = 180^\circ.$

Uiberdieß ist (§. 43. Zus. I.)

$$DF = \sqrt{(d^2 + e^2 - 2de \,.\, \text{Cos. E})}$$
$$= \sqrt{35212{,}1825} = 187{,}65.$$

8) Aus der gegebenen Seite AF oder $f = 154$, dann aus der Seite $AD = 195{,}98$, und aus der Seite $DF = 187{,}65$ berechne man im Dreiecke ADF die drei Winkel α, δ und μ; es ist (§. 43. Zus. I.)

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{AF^2 + AD^2 - DF^2}{2 \,.\, AF \,.\, AD},$$

$$\text{dann Cos. } \delta = \frac{AD^2 + DF^2 - AF^2}{2 \,.\, AD \,.\, DF},$$

$$\text{und Cos. } \mu = \frac{AF^2 + DF^2 - AD^2}{2 \,.\, AF \,.\, DF}.$$

Nun ist

	$AF^2 =$	23716,
$+$	$AD^2 =$	38408,2,
$AF^2 + AD^2 =$		62124,2,
$-$	$DF^2 =$	$-$ 35212,5,
also $AF^2 + AD^2 - DF^2 =$		26911,7;

dann ist

	$AD^2 =$	38408,2,
$+$	$DF^2 =$	35212,5,
$AD^2 + DF^2 =$		73620,7,
$-$	$AF^2 =$	$-$ 23716,
also $AD^2 + DF^2 - AF^2 =$		49904,7;

und

	$AF^2 =$	23716,
$+$	$DF^2 =$	35212,5,
$AF^2 + DF^2 =$		58928,5,
$-$	$AD^2 =$	$-$ 38408,2,
also $AF^2 + DF^2 - AD^2 =$		20502,3.

Uiberdieß ist Log. $2AF = 2{,}4885507$,
Log $AD = 2{,}2922118$,
also Log. $(2AF \,.\, AD) = 4{,}7807625$;

dann ist Log. $2AD = 2{,}5932418$,
Log. $DF = 2{,}2733486$,
also Log. $(2AD \,.\, DF) = 4{,}8665904$;

und Log. 2AF = 2,4885507,
Log. DF = 2,2733486,

also Log. (2AF . DF) = 4,7618993.

Es ist Log. (26911,7 × r) = 14,4299411,
Log. (2AF . AD) = 4,7807625,

also Log. Cos. α = 9,6491786
= Log. Cos. 63° 31′ 22″, und α = 63° 31′ 22″;

ferner ist Log. (49904,7 × r) = 14,6981415,
Log. (2AD . DF) = 4,8665904,

also Log. Cos. δ = 9,8315511
= Log. Cos. 47° 16′ 24″, und δ = 47° 16′ 24″;

endlich ist Log. (20520,3 × r) = 14,3121837,
Log. (2AF . AD) = 4,7618993,

also Log. Cos. μ = 9,5502844
= Log. Cos. 69° 12′ 14″, und μ = 69° 12′ 14″.

Die Summe dieser drei Winkel des Dreieckes ADF beträgt 180° (I. §. 43.); indem

α = 63° 31′ 22″,
δ = 47° 16′ 24″,
μ = 69° 12′ 14″,

mithin α + δ + μ = 180°.

9) Aus den gegebenen, und aus den berechneten Winkeln kann man jetzt die drei Winkel A, D und F des Sechseckes ABCDEF finden; es ist der Winkel BAF oder A = α + β, dann CDE oder D = γ + δ + ε, und AFE oder F = μ + φ.

Nun ist α = 63° 31′ 22″,
β = 48° 45′ 46″,

also α + β = A = 112° 17′ 8″;

dann ist γ = 55° 46′ 14″,
δ = 47° 16′ 24″,
ε = 9° 18′,

mithin γ + δ + ε = D = 112° 20′ 38″;

endlich ist $\mu = 69^\circ\ 12'\ 14''$,
$\varphi = 8^\circ\ 12'$,

folglich $\mu + \varphi = F = 77^\circ\ 24'\ 14''$.

Es ist demnach beinahe der Winkel A $= 112^\circ\ 17'\ 8''$, dann der Winkel D $= 112^\circ\ 20'\ 38''$, und der Winkel F $= 77^\circ\ 24'\ 14''$.

§. 45.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 43.

Man soll (Fig. 21.) im Siebenecke ABCDEFG, in welchem nicht lauter hohle Winkel vorkommen, die drei hohlen Winkel A, C und F berechnen, von welchen keiner unmittelbar auf den anderen folgt, wenn alle übrigen Winkel, und alle Seiten bekannt sind, und die gegebenen Stücke folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten:
$a = 531$,
$b = 361$,
$c = 383$,
$d = 308$,
$e = 400$,
$f = 617{,}524$,
$g = 550{,}299$;

Die bekannten Winkel:
$B = 113^\circ\ 23'$,
$D = 270^\circ\ 31'$,
$E = 105^\circ\ 55'$,
$G = 112^\circ\ 37'$.

Auflösung:

1) Man verbinde die unbekannten Winkel A, C und F durch die Diagonallinien AC, CF und AF, und bezeichne die neuen Winkel mit Buchstaben, so daß $BAC = \alpha$, $CAF = \beta$, $FAG = \gamma$, $BCA = \delta$, $ACD = \varepsilon$, $DCF = \mu$, $CFE = \nu$, $AFC = \varphi$, und $AFG = \omega$.

2) Durch die Diagonalen erhält man das Dreieck ACF, dann die geradlinigten ebenen Figuren ABC und AGF, und die gebrochene, in sich selbst zurückkehrende und in der nämlichen Ebene liegende Linie CDEFC, wo allemal außer der Dreiecksseite, und den beiden, ihr anliegenden Winkeln alle übrigen Winkel,

und alle übrigen Seiten oder einzelnen Linien bekannt sind.

3) Der Winkel *B* ist = 113° 23′, also *Sin.* B = Sin. 66° 37′, und *Cos.* B = — Cos. 66° 37′.

4) Der Winkel G ist = 112° 37′, also Sin. G = Sin. 67° 23′, und *Cos.* G = — Cos. 67° 23′.

5) Der erhabene Winkel D ist = 270° 31′, und der hohle Winkel E ist = 105° 55′, also Sin. D = — Sin. 89° 29′, und Cos. D = Cos. 89° 29′, ferner Sin. E = Sin. 74° 5′, und Cos. E = — *Cos.* 74° 5′, wie auch Sin. (D + E) = *Sin.* 16° 26′, und *Cos.* (D + E) = *Cos.* 16° 26′.

6) Im Dreiecke AB*C* ist (§. 43. Zus. II.)

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{b \,.\, \text{Sin. B}}{a - b \,.\, \text{Cos. B}}'$$

$$\text{dann Tang. } \delta = \frac{a \,.\, \text{Sin. B}}{b - a \,.\, \text{Cos. B}}'$$

und $AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. B})}$.

Nun ist

L.b = L.361 = 2,5575072,	Log. 361 = 2,5575072,
Log. Sin. B = 9,9627812 — 10,	Log. Cos. B = 9,5986602 — 10,
= 2,5202884;	= 2,1561674
	= Log. 143,274.

L. a = L. 531 = 2,7250945,	Log. 531 = 2,7250945,
Log. Sin. B = 9,9627812 — 10,	Log. Cos. B = 9,5986602 — 10,
= 2,6878757;	= 2,3237547
	= Log. 210,744.

a = 531,	b = 361,
— b . *Cos.* B = 143,274	— a . Cos. B = 210,744
a — b . Cos. B = 674,274;	b — a . Cos. B = 571,744.

Log. (r × b . *Sin.* B) = 12,5202884,
Log. 674,274 = 2,8288364,

also Log. Tang. α = 9,6914520
= Log. Tang. 26° 10′ 14″, und α = 26° 10′ 14″

Log. (r × a . Sin. B) = 12,6878757,
Log. 571,744 = 2,7572016,

also Log. Tang. δ = 9,9306741
= Log. 40° 26′ 45″, und δ = 40° 26′ 45″,
wie auch α + B + δ = 179° 59′ 59″.

Ferner ist
$a^2 = 281962{,}26$
$+ b^2 = 130321$
$- 2ab \,.\, \text{Cos. } B = 152157$

also $AC^2 = 564440{,}26$,
und AC = 751,29.

7) Im Dreiecke AGF ist (§. 43. Zus. II.)

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{f \,.\, \text{Sin. } G}{g - f \,.\, \text{Cos. } G},$$

$$\text{dann Tang. } \omega = \frac{g \,.\, \text{Sin. } G}{f - g \,.\, \text{Cos. } G},$$

und $AF = \sqrt{(g^2 + f^2 - 2fg \,.\, \text{Cos. } G)}$.

Nun ist

L. f = L. 617,524 = 2,7906538,
Log. Sin. G = 9,9652480 — 10,
= 2,7559018;

Log. 617,524 = 2,7906538,
Log. Cos. G = 9,5849685 — 10,
= 2,3756223
= Log. 237,477.

L. g = L. 550,299 = 2,7405987,
Log. Sin. G = 9,9652480 — 10,
= 2,7058467;

Log. 550,299 = 2,7405987,
Log. Cos. G = 9,5849685 — 10,
= 2,3255672
= Log. 211,625.

g = 550,299,
— f . Cos. G = 237,477,
g — f . Cos. G = 787,776;

f = 617,524,
— g . Cos. G = 211,625,
f — g . Cos. G = 829,149.

Log. (r × f . Sin. G) = 12,7559018,
Log. 787,776 = 2,8964028,

also Log. Tang. γ = 9,8594990
= Log. Tang. 35° 53′ 22″, und γ = 35° 53′ 22″.

Log. (r × g . Sin. G) = 12,7058467,
Log. 829,149 = 2,9186326,

also Log. Tang. ω = 9,7872141
= Log. Tang. 31° 29′ 38″, und ω = 31° 29′ 38″,
wie auch γ + G + ω = 180°.

Ferner ist
$g^2 = 302829,$
$f^2 = 381335,8,$
$-2fg \,.\, \text{Cos. } G = 261367,2,$

also $AF^2 = 945532,$
und $AF = 972,38.$

8) Bei der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie CDEFC ist (§. 43. Zus. II.)

$$\text{Tang. } \nu = \frac{d \,.\, \text{Sin. } E - c \,.\, \text{Sin.}(E + D)}{e - d \,.\, \text{Cos. } E + c \,.\, \text{Cos.}(E + D)},$$

$$\text{dann Tang. } \mu = \frac{d \,.\, \text{Sin. } D - e \,.\, \text{Sin.}(D + E)}{c - d \,.\, \text{Cos. } D + e \,.\, \text{Cos.}(D + E)},$$

$$\text{und } CF = \frac{e - d \,.\, \text{Cos. } E + c \,.\, \text{Cos. } (E + D)}{\text{Cos. } (E + D + \mu)}.$$

Nun ist

L. d = L.308 = 2,4885507,	Log. 308 = 2,4885507,
Log. Sin. E = 9,9830223--10,	Log. Cos. E = 9,4381292—10,
= 2,4715730	= 1,9266799
= Log. 296,092;	= Log. 84,4656.
L. c = L.383 = 2,5831988,	Log. 383 = 2,5831988,
L.Sin.(E+D) = 9,4516322—10,	L.Cos.(E+D) = 9,9818863—10,
= 2,0348310	= 2,5650851
= Log. 108,35;	= Log. 367,354.

	e = 400,
d . Sin. E = 296,092,	+ c . Cos.(E+D) = 367,354,
— c . Sin.(E+D) = — 108,35,	— d . Cos. E = 84,4656,
= 187,742;	= 851,8196.

$$\text{Tang. } \nu = \frac{r \times 187,742}{851,8196}.$$

Log. (r × 187,742) = 12,2735591,
Log. 851,8196 = 2,9303476,

also Log. Tang. ν = 9,3432115
= Log. Tang. 12° 25′ 45″, und ν = 12° 25′ 45″.

Ferner ist

L. d = L. 308 = 2,4885507,	Log. 308 = 2,4885507,
Log. Sin D = 9,9999823 — 10,	Log. Cos. D = 7,9550819 — 10,
= 2,4885330	= 0,4436326
= Log. 307,987;	= Log. 2,77736.
L. e = L. 400 = 2,6020600,	Log. 400 = 2,6020600,
L. Sin. (D + E) = 9,4516322 — 10,	L. Cos. (D + E) = 9,9818863 — 10,
= 2,0536922	= 2,5839463
= Log. 113,16;	= 383,66.

d . Sin. D = — 307,987
— e . Sin. (D + E) = — 113,16
= — 421,147

c = 383,
— d . Cos. D = ... — 2,77736
+ e . Cos. (D + E) = 383,66
= 766,66 — 2,77736
= 763,88264.

$$\text{Tang. } \mu = -\frac{r \times 421{,}147}{763{,}88264}.$$

Log. (r × 421,147) = 12,6244337,
Log. 763,88264 = 2,8830266,

also Log. Tang. μ = 9,7414071
= Log. Tang. 28° 52′ 9″, und der hohle Winkel μ ist = 28° 52′ 9″.

Weil man die inneren gegebenen Winkel der Figur, mithin den hohlen Winkel E, und den erhabenen Winkel D beibehalten hat, und dadurch die Winkel der gebrochenen, in sich zurückkehrenden Linie in der Richtung von F gegen E, D und C bestimmt wurden, so ist der gesuchte Winkel μ erhaben, und der andere unbekannte Winkel ν ist hohl. Da überdieß

die Tangens des Winkels μ negativ ist, so ist der Winkel $\mu = 360° - 28° 52' 9'' = 331° 7' 51''$; und es ist

$$E = 105° 55',$$
$$D = 270° 31',$$
$$\mu = 331° \ 7' \ 51'',$$

also $E + D + \mu = 707° 33' 51''$, und $\text{Cos.}(E + D + \mu) = 12° 26' 9''$; daher ist

$$CF = \frac{851{,}8196}{\text{Cos.}(E + D + \mu)} = \frac{851{,}8196}{\text{Cos. } 12° 26' 9''}.$$

$$\text{Log. } 851{,}8196 = 2{,}9303476,$$
$$\text{Log. Cos. } 12° 26' 9'' = 9{,}9896514 - 10,$$
$$- \quad +$$

also $\text{Log. } CF = 2{,}9406962,$
$= \text{Log. } 872{,}361$, und $CF = 872{,}361.$

9) Im Dreiecke ACF berechne man aus der Seite $AC = 751{,}29$, dann aus der Seite $CF = 872{,}361$, und aus der Seite $AF = 972{,}38$ die drei Winkel β, ACF und φ; es ist (§. 43. Zus. 11.)

$$\text{Cos. } \beta = \frac{AC^2 + AF^2 - CF^2}{2 \cdot AC \cdot AF},$$

$$\text{dann Cos. } ACF = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2 \cdot AC \cdot CF},$$

$$\text{und Cos. } \varphi = \frac{CF^2 + AF^2 - AC^2}{2 \cdot CF \cdot AF}.$$

Nun ist

$$AC^2 = 564440,$$
$$+ AF^2 = + 945532,$$
$$AC^2 + AF^2 = 1509972,$$
$$- CF^2 = - 761013,$$
$$\text{also } AC^2 + AF^2 - CF^2 = 748959;$$

Dann ist $AC^2 = 564440,$
$+ CF^2 = + 761013,$
$AC^2 + CF^2 = 1325453,$
$- AF^2 = - 945532,$
also $AC^2 + CF^2 - AF^2 = 379921;$

und $CF^2 = 761013,$
$+ AF^2 = + 945532,$
$CF^2 + AF^2 = 1706545,$
$- AC^2 = - 564440,$
also $CF^2 + AF^2 - AC^2 = 1142105.$

$\text{Log. } (748959 \times r) = 15{,}8744569,$
$\text{Log. } (2 \cdot AC \cdot AF) = 6{,}1646770,$
also $\text{Log. Cos. } \beta = 9{,}7097799$
$= \text{Log. } Cos.\ 59^\circ\ 9'\ 46''$, und $\beta = 59^\circ\ 9'\ 46''$;

$\text{Log. } (379921 \times r) = 15{,}5796933,$
$\text{Log. } (2 \cdot AC \cdot CF) = 6{,}1175352,$
also $\text{Log. Cos. } ACF = 9{,}4621581$
$= \text{Log. Cos. } 73^\circ\ 9'\ 6''$, und $ACF = 73^\circ\ 9'\ 6''$;

$\text{Log. } (1142105 \times r) = 16{,}0577060,$
$\text{Log. } (2 \cdot CF \cdot AF) = 6{,}2295644,$
also $\text{Log. Cos. } \varphi = 9{,}8281416$
$= \text{Log. Cos. } 47^\circ\ 41'\ 9''$, und $\varphi = 47^\circ\ 41'\ 9''$.

Die Summe dieser drei Dreieckswinkel beträgt $180^\circ\ 1''$, somit beinahe 180° (I. §. 43.).

10) Aus den von Nro. 6 — 9. berechneten Winkeln α, δ, γ, ω, β, μ, ν, φ und ACF kann man die drei Vieleckswinkel A, C und F finden. Es ist BAG oder $A = \alpha + \beta + \gamma$, dann EFG oder $F = \nu + \varphi + \omega$, und BCD oder $C = \delta + \varepsilon = \delta + ACF - \mu$.

Nun ist $\alpha = 26^\circ\ 10'\ 14''$,
$\beta = 59^\circ\ 9'\ 46''$,
$\gamma = 35^\circ\ 53'\ 22''$,

also $BAG = A = 121^\circ\ 13'\ 22''$;

dann $\omega = 31^\circ\ 29'\ 38''$,
$\varphi = 47^\circ\ 41'\ 9''$,
$\nu = 12^\circ\ 25'\ 45''$,

also $EFG = F = 91^\circ\ 36'\ 32''$;

und $\delta = +40^\circ\ 26'\ 45''$,
$+ ACF = +73^\circ\ 9'\ 6''$,
$- \mu = -28^\circ\ 52'\ 9''$,

also $BCD = C = 84^\circ\ 43'\ 42''$.

Es ist demnach der Winkel $A = 121^\circ\ 13'\ 22''$, dann $C = 84^\circ\ 43'\ 42''$, und $F = 91^\circ\ 36'\ 32''$; oder es ist, wenn man die Größe der Winkel nur in Graden und Minuten bezeichnet, und 13′ anstatt 13′ 22″, dann 37′ anstatt 36′ 32″, und 44′ anstatt 43′ 42″ setzt, beinahe $A = 121^\circ\ 13'$, dann $C = 84^\circ\ 44'$, und $F = 91^\circ\ 37'$.

§. 46.

III. Beispiel zur Aufgabe des §. 43.

Man soll (Fig. 22.) im Sechsecke ABCDEF die drei Winkel A, C und F, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, berechnen, wenn unter diesen der Winkel C erhaben ist, und nebst allen übrigen Winkeln auch alle Seiten der Figur bekannt sind, und die bekannten Stücke folgende Größe haben:

Die gegebenen Seiten:
$a = 164$,
$b = 85{,}6$,
$c = 110{,}5$,
$d = 77$,
$e = 151$,
$f = 362{,}5$;

Die gegebenen Winkel:
$B = 97^\circ\ 49'$,
$D = 94^\circ\ 7'$,
$E = 147^\circ\ 19'$.

Auflösung:

1) Man verbinde die unbekannten Winkel durch die Diagonalen AC und CF, und bezeichne die neuen Winkel mit Buchstaben, so daß $BAC = \alpha$, $CAF = \beta$, $BCA = \gamma$, $ACF = \delta$, $DCF = \varepsilon$, $CFE = \mu$, und $CFA = \nu$.

2) Die Diagonallinien theilen das Vieleck in das Dreieck ACF, und in die geradlinigten ebenen Figuren ABC und $CDEF$, bei welchen außer den Seiten AC und CF, und den ihnen anliegenden Winkeln α, γ, ε und μ alle Seiten und Winkel gegeben sind.

3) Der Winkel B ist $= 97° 49'$, also Sin. B $=$ Sin. $82° 11'$, und Cos. $B = -$ Cos. $82° 11'$.

4) Der Winkel D ist $= 94° 7'$, also Sin. D $=$ Sin. $85° 53'$, und Cos. $D = -$ Cos. $85° 53'$.

5) Der Winkel E ist $= 147° 19'$, also Sin. E $=$ Sin. $32° 41'$, und Cos. $E = -$ Cos. $32° 41'$.

6) Die Summe der Winkel ist $D + E = 241° 26'$, also Sin. $(D + E) = -$ Sin. $61° 26'$, und Cos. $(D + E) = -$ Cos. $61° 26'$.

7) Im Dreiecke ABC ist (§. 43. Zus. III.)

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{b \,.\, \text{Sin. B}}{a - b \,.\, \text{Cos. B}}, \text{ dann}$$

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{a \,.\, \text{Sin. } B}{b - a \,.\, \text{Cos. } B}, \text{ und}$$

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. B})}.$$

Nun ist

L. b = L. 85,6 = 1,9324738,	Log. 85,6 = 1,9324738,
Log. Sin. B = 9,9959458 — 10,	Log. Cos. B = 9,1335509 — 10,
= 1,9284196;	= 1,0660247,
	= 11,642.
L. a = L. 164 = 2,2148438,	Log. 164 = 2,2148438,
Log. Sin. B = 9,9959458 — 10,	Log. Cos. B = 9,1335509 — 10,
= 2,2107896;	= 1,3483947
	= 22,3046.

$$\begin{array}{rr} a = 164, & b = 85{,}6, \\ -b\,.\,\mathrm{Cos.}\,B = 11{,}642, & -a\,.\,\mathrm{Cos.}\,B = 22{,}3046, \\ \hline a - b\,.\,\mathrm{Cos.}\,B = 175{,}642; & b - a\,.\,\mathrm{Cos.}\,B = 107{,}9046. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{Log.}\,(r \times b\,.\,\mathrm{Sin.}\,B) = 11{,}9284196, \\ \mathrm{Log.}\,175{,}642 = 2{,}2446283, \\ \hline \text{also } \mathrm{Log.\,Tang.}\,\alpha = 9{,}6837913 \end{array}$$

$= \mathrm{Log.\,Tang.}\ 25^\circ\ 46'\ 19''$, und $\alpha = 25^\circ\ 46'\ 19''$.

$$\begin{array}{r} \mathrm{Log.}\,(r \times a\,.\,\mathrm{Sin.}\,B) = 12{,}2107896, \\ \mathrm{Log.}\,107{,}9046 = 2{,}0330260, \\ \hline \text{also } \mathrm{Log.\,Tang.}\,\gamma = 10{,}1777636 \end{array}$$

$= \mathrm{Log.\,Tang.}\ 56^\circ\ 24'\ 42''$, und $\gamma = 56^\circ\ 24'\ 42''$, wie auch $\alpha + B + \gamma = 180^\circ\ 1''$, mithin beinahe $= 180^\circ$.

Ferner ist

$$\begin{array}{rr} a^2 = 26896, \\ +b^2 = 7327{,}36, \\ -2ab\,.\,\mathrm{Cos.}\,B = 3818{,}55, \\ \hline \text{also } AC^2 = 38041{,}91, \\ \text{und } AC = 195{,}043. \end{array}$$

8) Beim Vierecke $CDEF$ ist (§. 43. Zuf. III.)

$$\mathrm{Tang.}\,\varepsilon = \frac{d\,.\,\mathrm{Sin.}\,D - e\,.\,\mathrm{Sin.}\,(D+E)}{c - d\,.\,\mathrm{Cos.}\,D + e\,.\,\mathrm{Cos.}\,(D+E)},$$

$$\text{dann } \mathrm{Tang.}\,\mu = \frac{d\,.\,\mathrm{Sin.}\,E - c\,.\,\mathrm{Sin.}\,(E+D)}{e - d\,.\,\mathrm{Cos.}\,E + c\,.\,\mathrm{Cos.}\,(E+D)},$$

$$\text{und } CF = \frac{e - d\,.\,\mathrm{Cos.}\,E + c\,.\,\mathrm{Cos.}\,(E+D)}{\mathrm{Cos.}\,(E+D+\varepsilon)}.$$

Nun ist

$\mathrm{L.}\,d = \mathrm{L.}\,77 = 1{,}8864907,$	$\mathrm{Log.}\,77 = 1{,}8864907,$
$\mathrm{Log.\,Sin.}\,D = 9{,}9988780 - 10,$	$\mathrm{Log.\,Cos.}\,D = 8{,}8560493 - 10,$
$= 1{,}8853687,$	$= 0{,}7425400,$
$= \mathrm{Log.}\,76{,}8013;$	$= \mathrm{Log.}\,5{,}5276.$
$\mathrm{L.}\,e = \mathrm{L.}\,151 = 2{,}1789769,$	$\mathrm{Log.}\,151 = 2{,}1789769,$
$\mathrm{L.\,Sin.}\,(D+E) = 9{,}9436238 - 10,$	$\mathrm{L.Cos.}\,(D+E) = 9{,}6795923 - 10,$
$= 2{,}1226007,$	$= 1{,}8585692$
$= \mathrm{Log.}\,132{,}617;$	$= \mathrm{Log.}\,72{,}2053.$

$-e.\,Sin.(D+E) = 132{,}617,$
$+d.\,Sin.\,D = 76{,}8013,$
$= 209{,}4183;$

$-d.\,Cos.\,D = 5{,}5276,$
$+c = 110{,}5,$
$= 116{,}0276,$
$-e.\,Cos.(D+E) = -72{,}2053,$
$= 43{,}8223.$

$$Tang.\,\varepsilon = \frac{209{,}4183 \times r}{43{,}8223}.$$

$Log.\,(r \times 209{,}4183) = 12{,}3210146,$
$Log.\,43{,}8223 = 1{,}6416952,$

also $Log.\,Tang.\,\varepsilon = 10{,}6793194$
$= Log.\,Tang.\,78°\,10'\,49''$, und $\varepsilon = 78°\,10'\,49''$.

Ferner ist

$L.\,d = L.\,77 = 1{,}8864907,$	$Log.\,77 = 1{,}8864907,$
$Log.\,Sin.\,E = 9{,}7323902 - 10,$	$Log.\,Cos.\,E = 9{,}9251408 - 10,$
$= 1{,}6188809,$	$= 1{,}8116315,$
$= Log.\,41{,}5796;$	$= Log.\,64{,}8084.$
$L.\,c. = L.\,110{,}5 = 2{,}0433623,$	$Log.\,110{,}5 = 2{,}0433623,$
$L.\,Sin.(D+E) = 9{,}9436238 - 10,$	$L.\,Cos.(D+E) = 9{,}6795923 - 10,$
$= 1{,}9869861,$	$= 1{,}7229546,$
$= Log.\,97{,}0479;$	$= Log.\,52{,}839.$

$d.\,Sin.\,E = 41{,}5796$
$-c.\,Sin.(D+E) = 97{,}0479$

$d.\,Sin.\,E - c.\,Sin.\,(E+D) = 138{,}6275.$

$c = 151,$
$-d.\,Cos.\,E = 64{,}8084$
$+c.\,Cos.(E+D) = \ldots\ldots - 52{,}839$
$= 215{,}8084 - 52{,}839$
$= 162{,}9694.$

$$Tang.\,\mu = \frac{138{,}6275 \times r}{162{,}9694}.$$

$Log.\,(138{,}6275 \times r) = 12{,}1418494,$
$Log.\,162{,}9694 = 2{,}2120794,$

also $Log.\,Tang.\,\mu = 9{,}9297700$
$= Log.\,40°\,23'\,12''$, und $\mu = 40°\,23'\,12''$.

Die Summe der Viereckswinkel $\varepsilon + D + E + \mu$ beträgt $360°\,1''$, und ist somit beinahe $= 360°$ (I. §. 46.).

Endlich ist $D = 94^\circ\ 7'$,
$E = 147^\circ\ 19'$,
$\varepsilon = 78^\circ\ 10'\ 49''$,

also $D + E + \varepsilon = 319^\circ\ 36'\ 49''$
und $\text{Cos.}\ (D + E + \varepsilon) = \text{Cos.}\ 40^\circ\ 23'\ 11''$.

$$CF = \frac{162{,}9694}{\text{Cos.}\ (\varepsilon + D + E)} = \frac{162{,}9694}{\text{Cos.}\ 40^\circ\ 23'\ 11''}.$$

Log. 162,9694 = 2,2120794,
Log. Cos. 40° 23′ 11″ = 9,8817713 — 10,
— +

also Log. CF = 2,3303081
= Log. 213,948, und CF = 213,948.

9) Im Dreiecke ACF berechne man aus der Seite AC = 195,043, dann aus der Seite CF = 213,948, und aus der Seite AF = 362,5 die Winkel β, δ und ν;

es ist $\text{Cos.}\beta = \frac{AC^2 + AF^2 - CF^2}{2 \cdot AC \cdot AF} = \text{Cos.}\ 29^\circ\ 8''$,

dann $\text{Cos.}\ \delta = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2 \cdot AC \cdot CF} = -\text{Cos.}\ 55^\circ 14'\ 2''$
$= \text{Cos.}\ 124^\circ\ 45'\ 58''$,

und $\text{Cos.}\ \nu = \frac{CF^2 + AF^2 - AC^2}{2 \cdot CF \cdot AF} = \text{Cos.}\ 26^\circ\ 13'\ 55''$;

weßhalb $\beta = 29^\circ\ 8''$,
$\delta = 124^\circ\ 45'\ 58''$,
$\nu = 26^\circ\ 13'\ 55''$,

$\beta + \delta + \nu = 180^\circ\ 1''$, somit beinahe $= 180^\circ$.

10) Aus diesen Winkeln, und aus den theils früher berechneten, theils gegebenen Winkeln der Figur kann man die drei Winkel A, C und F finden; es ist BAF oder $A = \alpha + \beta$, dann BCD oder $C = \gamma + \delta + \varepsilon$, und $\measuredangle FE$ oder $F = \mu + \nu$.

Nun

Nun ist $\alpha = 25^\circ\ 46'\ 19''$,
$+\ \beta = 29^\circ\ \ \ 8''$,
also $BAF = A = 54^\circ\ 46'\ 27''$;

dann $\gamma = 56^\circ\ 24'\ 42''$,
$+\ \delta = 124^\circ\ 45'\ 58''$,
$+\ \varepsilon = 78^\circ\ 10'\ 49''$,
also $BCD = C = 259^\circ\ 21'\ 29''$;

endlich $\mu = 40^\circ\ 23'\ 12''$,
$+\ \nu = 26^\circ\ 13'\ 55''$,
also $AFE = F = 66^\circ\ 37'\ \ 7''$.

Daher ist beinahe der Winkel $A = 54^\circ\ 46'\ 27''$, dann $C = 259^\circ\ 21'\ 29''$, und $F = 66^\circ\ 37'\ 7''$.

Anmerkung: Da bei der Aufgabe des §. 43., nach welcher die vorstehenden drei Beispiele aufgelöst wurden, aus den gegebenen Stücken die Seiten eines Dreieckes, und aus diesen die drei Winkel berechnet werden, um bei geradlinigten ebenen Figuren die drei unbekannten Winkel zu finden, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, so müssen die Seiten solcher Dreiecke mit der möglichsten Genauigkeit berechnet werden. Zu diesem Zwecke ist es gut, wenn man sich bei den Berechnungen durch eine zweite Auflösung von der Richtigkeit der gefundenen Resultate überzeugt.

Berechnet man bei geradlinigten ebenen Figuren eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, so bestimme man jeden Winkel nach der ersten Auflösung des §. 30. Nro. 2. mit Benützung des im §. 7. aufgestellten Lehrsatzes, es ist die Summe aller Winkel $= 2R(n-2)$ (I. §. 53.); und sucht man eine unbekannte Seite oder Linie, so kann diese nach der ersten Auflösung des §. 30. Nro. 4. durch die Annahme eines jeden Endspunktes als Anfangspunktes der Abszissenlinie auf eine zweifache Weise gefunden werden (§. 6.); oder man kann auch bei geradlinigten ebenen Figuren, wenn die unbekannte Seite nach der ersten Auflösung des §. 30. gefunden ist, dieselbe nach der zweiten Auflösung des nämlichen §. mittels des im §. 9. aufgestellten Lehrsatzes finden. Aus diesen Gründen habe ich auch in den Zusätzen des §. 43. mehrentheils zur Bestimmung der gesuchten Stücke eine zweifache Formel angegeben.

§. 47.

III. Aufgabe, bei geradlinigten ebenen Figuren aus den gegebenen Stücken eine beliebige Diagonallinie zu finden.

Auflösung:

1) Wenn bei einer geradlinigten ebenen Figur alle Seiten und alle Winkel, mit Ausnahme dreier Stücke, bekannt sind, welche letztere nicht lauter Seiten sein dürfen, und man sucht eine beliebige Diagonallinie, so kann man nach den bisher angeführten Aufgaben aus den gegebenen Stücken Alles so bestimmen, daß man am Ende eine geradlinigte ebene Figur, oder eine gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie erhält, bei welcher alle Stücke bis auf die Diagonal, und die ihr anliegenden Winkel bekannt sind.

2) Die Diagonallinie kann ganz innerhalb, oder ganz außerhalb der Figur, oder zum Theile innerhalb, und zum Theile außerhalb liegen.

3) Liegt die Diagonallinie ganz innerhalb der Figur, wie (Fig. 14.) die Diagonal BE, und es sind bei dem Sechsecke ABCDEF alle Seiten und Winkel entweder schon zum Voraus gegeben, oder durch Rechnung gefunden, so bekommt man durch die Diagonallinie die Vierecke ABEF und BCDE, wo allemal alle Seiten und Winkel, außer der Diagonallinie BE und den ihr anliegenden Winkeln bekannt sind, weßhalb dieselbe nach dem I. Zusatze des §. 35. gefunden werden kann.

4) Fällt die Diagonallinie ganz außerhalb der Figur, wie (Fig. 16.) die Diagonallinie BD, so entstehen durch diese die geradlinigten ebenen Figuren $ABDEF$ und BCD, bei welchen allemal alle Seiten und Winkel bis auf die Diagonallinie, und die ihr anliegenden Winkel bekannt sind, und es kann dieselbe nach dem III. Zusatze des §. 35. berechnet werden.

5) Fällt endlich die Diagonallinie zum Theile außerhalb, und zum Theile innerhalb der Figur, wie (Fig. 15.) die Diagonallinie BE, so kann diese bei

der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie BCDÆB aus den gegebenen Stücken, nämlich aus den Seiten BC, CD und DE, und aus den Winkeln C und D nach dem 11. Zusatze des §. 35. bestimmt werden.

Anmerkung: Da in den §§. 36, 37 und 38. für die vorstehenden drei Fälle schon Beispiele angeführt worden sind, so bedarf es für die Aufgabe dieses §. zur Bestimmung der möglichen Diagonallinien bei geradlinigten ebenen Figuren keiner neuen Beispiele mehr.

§. 48.

Zusammenstellung der Bedingungen, welche angeben, in wie ferne geradlinigte ebene Figuren durch gewisse Stücke zur Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel bestimmt sind.

a) Wenn bei einer geradlinigten ebenen Figur mehr als drei Stücke unbekannt sind, so kann man aus den gegebenen Seiten und Winkeln nach den im ersten Hauptstücke aufgestellten Lehrsätzen keine Gleichungen aufstellen, in welchen nur ein einziges unbekanntes Stück vorkäme; deßwegen dürfen bei solchen Figuren immerhin höchstens nur drei Stücke unbekannt sein, falls diese letzteren aus den bekannten Seiten und Winkeln sollten gefunden werden können (Arithm. III. §. 94. Zus.).

b) Wenn aber auch nur drei Stücke unbekannt sind, so dürfen diese nicht lauter Seiten sein, sonst könnte man wieder nach den erwähnten Lehrsätzen keine Gleichungen aufstellen, in welchen jedesmal nur eine unbekannte Seite vorkäme; deßwegen müssen bei einer geradlinigten ebenen Figur von n Seiten immerhin $2n - 3$ Stücke gegeben sein, um die unbekannten Stücke zu finden, und es dürfen diese letzteren nie lauter Seiten sein (§. 18.).

c) Da unter den gesuchten drei Stücken wenigstens ein Winkel sein muß, so können bei solchen Figuren zwei Seiten und ein Winkel, dann eine Seite und zwei Winkel, oder drei Winkel unbekannt sein. Sind

nur zwei Stücke unbekannt, so können es zwei Seiten, oder zwei Winkel, oder eine Seite und ein Winkel sein, und wenn nur ein Stück unbekannt ist, so kann es eine Seite, oder ein Winkel sein; es sind aber diese zwei letzteren Fälle im ersten Falle enthalten, nach welchen drei Stücke unbekanut sind, und es geschieht die Berechnung der unbekannten zwei Stücke, und eines unbekannten Stückes nach den nämlichen Regeln und Auflösungen, nach welchen drei unbekannte Stücke, welche nicht lauter Seiten sind, gefunden werden (§. 38. Anmerk.).

d) Sucht man nach den im §. 4 und 5., und im §. 9. aufgestellten Lehrsätzen aus den gegebenen oder schon berechneten Stücken unmittelbar eine Seite, so erhält diese bei der Berechnung einen positiven Werth, da eine Polygonsseite als solche nicht negativ ist, und dadurch ergibt sich die gesuchte Seite selbst; und eben so ergibt sich auch unmittelbar die wahre Größe eines Polygonswinkels, wenn alle übrigen gesuchten Winkel bekannt sind, wie dieses aus den allgemeinen Auflösungen und Beispielen ersichtlich ist, welche in diesem Hauptstücke im II., III. und IV. Abschnitte vorkommen.

e) Sucht man aber nach den im §. 4 und 5., oder im §. 7 und 8. aufgestellten Lehrsätzen mittels der gegebenen oder schon berechneten Stücke aus dem Sinus und Kosinus, und aus der Tangens der unbekannten Winkel diese letzteren selbst, wie es nach den angeführten allgemeinen Auflösungen in den §§. 30, 33, 35, 39 und 43., und bei den darnach angeführten Beispielen geschehen ist, so gibt die Rechnung jedesmal nur als Resultat einen spitzigen Winkel, der entweder der gesuchte Winkel selbst, oder zum unbekannten Winkel das Supplement ist (II. §. 82.).

f) Da der Sinus im ersten Halbkreise positiv, und im zweiten negativ (II. §. 66.), dann der Kosinus im ersten und vierten Quadranten positiv, und im zweiten und dritten Quadranten negativ (II. §. 71.), und die Tangens im ersten und dritten Quadranten positiv, und im zweiten und vierten negativ ist (II. §. 78.),

und es sich eben so verhält, wenn man eine Summe von Winkeln erhält, die größer ist als 360 Grad (II. §. 82. d.), so entscheidet zwar das Zeichen „+ oder —“, ob der gesuchte Winkel beim Sinus hohl oder erhaben, dann ob er beim Kosinus im ersten oder vierten, oder ob er im zweiten oder dritten Quadranten ist, und ob derselbe bei der Tangens im ersten oder dritten, oder ob er im zweiten oder vierten Quadranten ist.

g) Die einzelnen Winkel geradlinigter ebener Figuren sind jederzeit nur hohl oder erhaben (§. 1. a.); deßwegen ist, wenn man bei der Bestimmung eines Winkels aus dem Sinus nach der vorgenommenen Berechnung auch weiß, daß der gesuchte Winkel hohl oder erhaben ist, noch unentschieden, ob man im ersten Falle den gefundenen spitzigen Winkel oder den stumpfen Winkel, zu dem er das Supplement ist, oder ob man im zweiten Falle die Ergänzung zu 180 oder zu 360 Grad nehmen muß, um einen erhabenen Winkel im dritten, oder im vierten Quadranten zu erhalten; und man muß anderswoher, etwa aus einem vorläufigen Grundrisse der Figur, oder aus der Beschaffenheit der übrigen Winkel, wissen, ob man im ersten Falle den spitzigen, oder korrespondirenden stumpfen Winkel, oder im zweiten Falle den sich ergebenden erhabenen Winkel im dritten, oder im vierten Quadranten nehmen darf.

h) Auf eine ähnliche Weise verhält es sich, wenn man die Winkel aus dem Kosinus, oder aus der Tangens bestimmt; wenn man auch die Zeichen dieser Linien aus der Berechnung weiß, so muß es anderswoher bekannt sein, ob der gesuchte Winkel hohl oder erhaben ist. Beim positiven Kosinus ist der hohle Winkel spitzig, und der erhabene Winkel im vierten Quadranten, und beim negativen Kosinus ist der hohle Winkel im zweiten, und der erhabene im dritten Quadranten. Uiberdieß ist bei der positiven Tangens der hohle Winkel spitzig, und der erhabene im dritten Quadranten, und bei der negativen Tangens ist der

hohle Winkel stumpf, und der erhabene im vierten Quadranten.

i) Aus diesen Gründen habe ich bei den allgemeinen Auflösungen in den beigefügten Zusätzen noch besonders angegeben, in wie ferne geradlinigte ebene Figuren durch die in den vorkommenden Aufgaben genannten Bedingungen so bestimmt sind, daß man aus den gegebenen Seiten und Winkeln die unbekannten Stücke berechnen kann (§. 23. Zus. VII., §. 27. Zus. IV., §. 30. Zus. III., §. 33. Zus. II., §. 35. Zus. IV., und §. 39. Zus. III.); und ich habe deßwegen auch im I. Theile dieses Lehrbuches in den §§. 47 und 54. nur in Absicht auf Figuren mit lauter hohlen Winkeln für einige Fälle die Bedingungen angegeben, unter welchen dieselben durch die bekannten Seiten und Winkel gegeben sind, und am Schlusse des §. 54. die Bemerkung beigefügt, daß es in der Polygonometrie näher nachgewiesen werde, in wie ferne ein Vieleck nach den gesetzten Bedingungen gegeben ist, und die aufgestellten Lehrsätze nur einige Bedingungen angeben, unter welchen die geradlinigten ebenen Figuren bestimmt sind.

Anmerkung: 1) Wenn hier gesagt wird, daß eine geradlinigte ebene Figur durch gewisse Stücke bestimmt ist, oder nicht, so hat es den Sinn, daß bei einer solchen aus den bekannten Seiten und Winkeln die unbekannten Stücke unmittelbar berechnet werden können, oder nicht.

2) In der Geometrie wird erwiesen, daß ein geradlinigtes ebenes Dreieck durch alle drei Seiten vollkommen bestimmt ist (I. §. 24. Zus.); sucht man nun in der ebenen Trigonometrie nach dem im II. Theile dieses Lehrbuches im §. 117. aufgestellten Lehrsatze die drei unbekannten Winkel, so werden zwar alle Faktoren positiv (I. §. 18. Zus. II.), es gibt aber die Rechnung für den Sinus, welcher positiv ist, unmittelbar nur einen spitzigen Winkel, und auch der stumpfe Winkel hat einen positiven Sinus, und es ist sowohl nach der gesetzten Bedingung, als auch nach der vorgenommenen Berechnung unbestimmt, ob alle drei Winkel des Dreieckes spitzig sind, oder ob jener Dreieckswinkel stumpf sein muß, welcher der größten Seite gegenüber steht (I. §. 30.). In dieser Hinsicht kann man auch

im Dreiecke nicht sagen, es sei durch die drei Seiten so bestimmt, daß man unmittelbar aus diesen die drei Winkel durch die angezeigte Berechnung finden kann.

Anders verhält es sich, wenn man im Dreiecke die Winkel nach anderen Lehrsätzen bestimmt; geschieht es nach dem in diesem Theile im §. 8. aufgestellten Lehrsatze mittels des Kosinus, so gibt die Berechnung beim größten Winkel selbst an, daß dieser spitzig oder stumpf ist, je nachdem der Kosinus positiv, oder negativ ist. Weil im Dreiecke alle Winkel hohl sind, und die Summe der drei Winkel $= 180°$ (I. §. 43.), so gibt eine zu große Abweichung der drei spitzigen Winkel von dieser Summe an, daß, wenn man richtig gerechnet hat, der der größten Seite gegenüber stehende Winkel stumpf ist; ist aber die Abweichung von jener Summe sehr klein, so erkennt man daraus noch nicht, ob ein stumpfer Winkel da ist, oder ob die kleine Differenz von der vorgenommenen Berechnung selbst herrühre (II. §. 128.).

III. Hauptstück.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes der geradlinigten ebenen Figuren zu ihren Seiten und Winkeln.

I. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Dreieckes zu seinen Seiten und Winkeln.

§. 49.

Bezeichnung der vorkommenden Stücke.

1) Wie in der ebenen Trigonometrie (II. §. 103.), so bezeichnet man auch hier die Winkel eines geradlinigten ebenen Dreieckes ABC (Fig. 9.) der Ordnung nach mit den Buchstaben A, B und C, und die diesen Winkeln opponirten Seiten mit den Buchstaben a, b und c, so daß die Seite $BC = a$, dann $AC = b$, und $AB = c$ gesetzt wird.

2) Ein von der Spitze auf die angenommene Grundlinie gezogenes Perpendikel, oder die Höhe des Dreieckes (I. §. 18.) drückt man der Kürze wegen manchmal durch f aus, und der Flächeninhalt des Dreieckes wird durch das Zeichen „△“ angezeigt. Nimmt man (Fig. 9.) die Seite AC als Basis oder Grundlinie des Dreieckes ABC an, so ist B die Spitze, und das Perpendikel $BD = f$ ist die Höhe desselben.

3) Wie bisher in der Polygonometrie (§. 3. Zus. VI.), so wird auch hier die Größe des Radius oder r gleich 1 gesetzt; darauf hat man wieder, wie auf die durch die Zeichen „+ und —“ angezeigte Beschaffenheit der trigonometrischen Linien, bei den Beweisführungen, und bei den Auflösungen der Aufgaben die geeignete Rücksicht zu nehmen.

§. 50.

I. Lehrsatz:

Wenn man die zwei gegebenen Seiten eines Dreieckes durch c und b, und den von ihnen eingeschlossenen bekannten Winkel durch A bezeichnet, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder (Fig. 9.)

$$\triangle = \frac{bc \,.\, Sin.\, A}{2}.$$

Beweis:

1) Der Flächeninhalt des Dreieckes ist $= \frac{B \,.\, A}{2}$ $= \frac{1}{2}B \,.\, A = \frac{1}{2}A \,.\, B$, wenn die Basis oder Grundlinie des Dreieckes durch B, und dessen Höhe BD durch A ausgedrückt wird (I. §. 156.);

2) Es verhält sich $AB : BD = r : Sin.\, A$, das ist, $c : BD = 1 : Sin.\, A$ (II. §. 104.), weßhalb $BD = c \,.\, Sin.\, A$;

3) Setzt man bei Nro. 1. anstatt BD oder A diesen Werth, und b anstatt B oder AC (§. 49.), so ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

$$\Delta = \tfrac{1}{2}b \,.\, c \,.\, \text{Sin. A} = \frac{bc \,.\, \text{Sin. A}}{2}.$$

I. Zusatz: Durch zwei Seiten, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ist der Flächeninhalt eines Dreieckes gegeben (I. §. 20. Zus.); weil man die eine dieser zwei Seiten als Grundlinie annehmen, und aus der anderen bekannten Seite die Höhe des Dreieckes bestimmen kann.

II. Zusatz: Aus dem Flächeninhalte eines Dreieckes, dann aus einem Winkel, und einer anliegenden Seite kann man die andere anliegende Seite finden.

Nach dem Lehrsatze ist

$\Delta = \frac{bc \,.\, \text{Sin. A}}{2}$, weßhalb (Arithm. III. §. 98.)

$$b = \frac{2\Delta}{c \,.\, \text{Sin. A}}, \text{ und } c = \frac{2\Delta}{b \,.\, \text{Sin. } A}.$$

III. Zusatz: Aus dem bekannten Flächeninhalte eines Dreieckes, und aus zwei gegebenen Seiten kann man den Winkel berechnen, den diese zwei Seiten einschließen.

Es ist $\Delta = \frac{bc \,.\, \text{Sin. A}}{2}$, somit $\text{Sin. A} = \frac{2\Delta}{bc}$.

IV. Zusatz: Sind die zwei Seiten, welche nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, einander gleich, und ist somit $b = c$, so ist

$$\Delta = \frac{b \,.\, b \,.\, \text{Sin. A}}{2} = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A}}{2} = \frac{c^2 \,.\, \text{Sin. } A}{2},$$

dann $b = c = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. A}}}$, und $\text{Sin. A} = \frac{2\Delta}{b^2} = \frac{2\Delta}{c^2}$.

V. Zusatz: Drückt man, wie es in der Plantrigonometrie bei der Bestimmung des Flächeninhaltes der Dreiecke geschehen ist, den Radius oder Halbmesser durch r aus, so ist

$$\Delta = \frac{bc \,.\, \text{Sin. A}}{2r} = \tfrac{1}{2}bc \,.\, \frac{\text{Sin. A}}{r}, \text{ dann } b = \frac{2\Delta \,.\, r}{c \,.\, \text{Sin. A}},$$

ferner $c = \frac{2\Delta \,.\, r}{b \,.\, \text{Sin. A}}$, und $\text{Sin. A} = \frac{2\Delta \,.\, r}{bc}$.

Im gleichschenklichten Dreicke ist, wenn $b = c$, und der Radius $= r$ ist,

$$\triangle = \frac{b^2 \cdot \text{Sin. } A}{2r} = \frac{c^2 \cdot \text{Sin. } A}{2r},$$

dann $$b = c = \sqrt{\frac{2\triangle \cdot r}{\text{Sin. } A}},$$

und $$\text{Sin. } A = \frac{2\triangle \cdot r}{b^2} = \frac{2\triangle \cdot r}{c^2}.$$

§. 51.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite AB oder $c = 3250$, dann AC oder $b = 3345$, und der eingeschlossene Winkel $A = 50° 24'$; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des §. 50. ist den gegebenen Stücken gemäß der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

$$\triangle = \frac{b \cdot c \cdot \text{Sin. } A}{2} = \tfrac{1}{2}b \cdot c \cdot \text{Sin. } A;$$

2) Nun ist

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}b = \text{Log. } 1672{,}5 = 3{,}2233661,$$

dann $$\text{Log. } c = \text{Log. } 3250 = 3{,}5118834,$$

und $$\text{Log. Sin. } A = \text{Log. Sin. } 50° 24' = 9{,}8867801 - 10,$$

also $$\text{Log. } \triangle = 16{,}6220296 - 10$$

$$= 6{,}6220296 = \text{Log. } 4188221, \text{ und } \triangle = 4188221.$$

Es ist demnach der gesuchte Flächeninhalt dieses Dreieckes $= 4188221$.

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes oder $\triangle = 4188221$, dann der Winkel $A = 50° 24'$,

und die anliegende Seite $c = 3250$, wie groß ist die andere anliegende Seite b?

Auflösung:

1) Nach dem II. Zusatze des §. 50. ist

$$b = \frac{2\Delta}{c \,.\, \text{Sin. A}};$$

2) Nun ist Log. 2 = 0,3010300,
Log. Δ = Log. 4188221 = 6,6220296,
also Log. 2Δ = 6,9230596;

dann Log. c = Log. 3250 = 3,5118834,
Log. Sin. A = Log. Sin. 50° 24′ = 9,8867801 — 10,
also Log. (c . Sin. A) = 3,3986635;

überdieß ist Log. 2Δ = 6,9230596,
und Log. (c . Sin. A) = 3,3986635,
folglich Log. b = 3,5243961
= Log. 3345, und b = 3345.

Es ist daher die gesuchte Seite b = 3345.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes oder $\Delta = 4188221$, dann die Seite $c = 3250$, und die Seite $b = 3345$, wie groß ist der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel A?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 50. ist

$$\text{Sin. A} = \frac{2\Delta}{c \,.\, b};$$

2) Nun ist Log. $(2\Delta \times r)$ = 16,9230596,
dann Log. (b . c) = 7,0362795,
also Log. Sin. A = 9,8867801
= Log. Sin. 50° 24′, und A = 50° 24′.

Es ist demnach der gesuchte Winkel A = 50° 24′.

IV. Beispiel:

Wenn (*Fig.* 9.) im Dreiecke die Seiten a und c einander gleich sind, dann $a = c = 3345$, und der Winkel $A = 50^\circ\ 24'$, wie groß ist der Flächeninhalt des Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 50. ist in diesem Falle

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A}}{2} = \frac{c^2 \,.\, \text{Sin. A}}{2};$$

2) Nun ist Log. b = Log. c = 3,5243961

× 2

also Log. b^2 = Log. c^2 = 7,0487922,

Log. Sin. *A* = 9,8867801—10,

Log. (b^2 . Sin. A) = 6,9355723,

Log. 2 = 0,3010300,

also Log. Δ = 6,6345423

= Log. 4310646, und Δ = 4310646.

Der Flächeninhalt des Dreieckes ist demnach = 4310646.

V. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt eines gleichschenklichten Dreieckes oder Δ = 4310646, und der von den zwei gleichen Seiten b und c eingeschlossene Winkel = 50° 24', wie groß ist jede dieser zwei Seiten?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 50. ist nach dieser Voraussetzung

$$b = c = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. A}}};$$

2) Nun ist Log. Δ = 6,6345423,
$+$ Log. 2 = 0,3010300,

mithin Log. 2Δ = 6,9355723,
dann Log. Sin. A = 9,8867801 — 10,

folglich Log. $\left(\frac{2\Delta}{\text{Sin. A}}\right)$ = 7,0487922,

und Log. $\left(\sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. A}}}\right)$ = 3,5243961 = Log. 3345,

weßhalb $b = c = 3345$.

Es ist demnach jede der zwei gleichen Seiten b und $c = 3345$.

VI. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt eines gleichschenklichten Dreieckes oder $\Delta = 4310646$, und jede der zwei gleichen Seiten b und $c = 3345$, wie groß ist der von ihnen eingeschlossene Winkel A?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 50. ist

$$\text{Sin. A} = \frac{2\Delta}{b^2} = \frac{2\Delta}{c^2};$$

2) Nun ist Log. $(2\Delta \times r)$ = 16,9355723,
und Log. b^2 = 7,0487922,

also Log. Sin. A = 9,8867801
= Log. Sin. 50° 24′, und A = 50° 24′.

Der gesuchte Winkel A hält daher 50° 24′.

Anmerkung: 1) Um die Tabellen mit mehreren Dreiecken nicht zu überhäufen, werde ich mich fast immerhin bei den Beweisesführungen und Auflösungen der Aufgaben auf das bei der Figur 9. vorkommende Dreieck beziehen.

2) Der Kürze wegen wählte ich hier, wie es bisher bei den polygonometrischen Berechnungen geschehen ist, die Formeln nach dem Radius = 1, und ich werde dieses auch in der Folge thun (§. 9. Zus. IV — VI., und §. 49. Nro. 3.).

§. 52.

II. Lehrsatz:

Wenn man eine gegebene Seite eines Dreieckes durch b, und die beiden anliegenden bekannten Winkel durch A und C ausdrückt, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder (Fig. 9.)

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}}{2 \,.\, \text{Sin. (A + C)}}.$$

Beweis:

1) Man ziehe von B auf AC das Perpendikel BD = f, und es seien nebst der Seite AC oder b die Winkel A und C bekannt, es ist BD = f = c × Sin. A (§. 50. Nro. 2.);

2) Im Dreiecke verhält sich (II. §. 112.)

$$b : c = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C,$$

und, da Sin. B = Sin. (A + C) (II. §. 65.),

$$b : c = \text{Sin. (A + C)} : \text{Sin. C},$$

$$\text{weßhalb } c = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. (A + } C)};$$

3) Das Perpendikel oder die Höhe BD, welche nach Nro. 1. gleich ist c . Sin. A, ist jetzt

$$= \text{Sin. A} \times \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. (A + C)}} = \frac{b \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. (A + C)}},$$

und deßhalb ist der Flächeninhalt der Dreieckes, oder (I. §. 156.)

$$\Delta = \frac{AC \,.\, BD}{2} = \tfrac{1}{2}b \times \frac{b \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. (A + } C)}$$

$$= \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}}{2 \,.\, \text{Sin. (A + C)}}.$$

I. Zusatz: Durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel ist der Flächeninhalt eines Dreieckes gegeben (I. §. 22. Zus.).

II. Zusatz: Aus dem Flächeninhalte eines Dreieckes, und aus zwei Winkeln kann man die Seite finden, welcher diese zwei Winkel anliegen.

Nach dem Lehrsatze dieses §. ist

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}}{2 \,.\, \text{Sin. (A + C)}}, \text{ daher}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\Delta \,.\, \text{Sin. (A + C)}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}}\right)} \text{ (Arithm. IV. §. 20.)}$$

III. Zusatz: Aus dem Flächeninhalte eines Dreieckes, dann aus einer Seite, und einem ihr anliegenden Winkel kann der andere, ihr anliegende Winkel gefunden werden.

Nach dem vorstehenden Lehrsatze ist

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } C}{2 \,.\, \text{Sin. (A + } C)}, \text{ daher}$$

$$2\Delta \,.\, \text{Sin. (A + } C) = b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C},$$

und $2\Delta(\text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. C} + \text{Sin. } C \,.\, \text{Cos. A}) = b^2 \times \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. C}$ (II. §. 83.), mithin

$$\frac{\text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. } C}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } C} + \frac{\text{Sin. } C \,.\, \text{Cos. A}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}} = \frac{b^2}{2\Delta},$$

$$\text{und } \frac{\text{Cos. C}}{\text{Sin. C}} + \frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}} = \frac{b^2}{2\Delta},$$

wie auch $\text{Cot. c} + \text{Cot. A} = \frac{b^2}{2\Delta}$ (II. §. 79.),

weßhalb $\text{Cot. c} = \frac{b^2}{2\Delta} - \text{Cot. A}$,

und $\text{Cot. } A = \frac{b^2}{2\Delta} - \text{Cot. c}$.

IV. Zusatz: Wenn die beiden gegebenen Winkel A und C, welche der bekannten Seite b anliegen, einander gleich sind, so ist

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A}}{4 \,.\, \text{Cos. A}} = \tfrac{1}{4} b^2 \,.\, \text{Tang. A} = \tfrac{1}{4} b^2 \,.\, \text{Tang. C},$$

dann $b = \sqrt{\frac{4\Delta}{\text{Tang. A}}} = \sqrt{\frac{4\Delta}{\text{Tang. C}}}$,

und $\text{Tang. A} = \text{Tang. C} = \frac{4\Delta}{b^2}$;

indem nach dem Lehrsatze

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } C}{2 \,.\, \text{Sin. } (A + C)}, \text{ also, weil } A = C,$$

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } A}{2 \,.\, \text{Sin. } 2A}$$

$$= \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } A}{2(2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Cos. } A)} \text{ (II. §. 83. Zuf. I.)}$$

$$= \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A}{4 \,.\, \text{Cos. } A} = \tfrac{1}{4}b^2 \times \frac{\text{Sin. } A}{\text{Cos. } A}$$

$= \tfrac{1}{4}b^2 \,.\, \text{Tang. } A = \tfrac{1}{4}b^2 \,.\, \text{Tang. } C$ (II. §. 76.),

und daher (Arithm. III. 98., und IV. §. 20.)

$$b = \sqrt{\frac{4\Delta}{\text{Tang. } A}} = \sqrt{\frac{4\Delta}{\text{Tang. } C}}, \text{ wie auch}$$

$$\text{Tang. } A = \text{Tang. } C = \frac{4\Delta}{b^2} \text{ (II. §. 110.).}$$

Anmerkung: Der Kürze wegen führe ich die vorstehenden Formeln für den Radius oder Halbmesser $= r$ nicht mehr an. Es ergeben sich dieselben leicht bei den Berechnungen aus den Lehrsätzen und Auflösungen, welche sowohl in der ebenen Trigonometrie, als auch bisher in der Polygonometrie vorgekommen sind; deßwegen ist auch ihre besondere Entwickelung und Aufstellung bei den Dreiecken, und späterhin bei den Vierecken und Vielecken nicht nöthig.

§. 53.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite $b = 5350$, dann der eine, ihr anliegende Winkel $A = 64° 30'$, und der andere Winkel $C = 54° 20'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des §. 52. ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

Δ

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, Sin.\ A \,.\, Sin.\ C}{2 \,.\, Sin.\ (A + C)};$$

2) Nun ist

Log. b^2 = Log. 5350^2 = 7,4567076,
Log. Sin. A = Log. Sin. 64° 30′ = 9,9554882—10,
Log. Sin. C = Log. Sin. 54° 20′ = 9,9097821—10,

also Log. (b^2 . Sin. A . Sin. C) = 7,3219779,
dann Log. (2 . Sin. (A + C)) = 10,2435471—10,

folglich Log. Δ = 7,0784308
= Log. 11979283, und Δ = 11979283.

Der Flächeninhalt dieses Dreieckes ist demnach = 11979283.

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes = 11979283, dann der Winkel A = 64° 30′, und C = 54° 20′, wie groß ist die Seite b, welcher diese zwei Winkel anliegen?

Auflösung:

1) Nach dem II. Zusatze des §. 52. ist

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\Delta \,.\, Sin.\ (A + C)}{Sin.\ A \,.\, Sin.\ C}\right)};$$

2) Nun ist Log. 2Δ = 7,3794608,
Log. Sin. (A + C) = 9,9425171 — 10,

also Log. (2Δ . Sin. (A + C)) = 7,3219779,
dann Log. (Sin. A . Sin. C) = 0,8652703 — 1,

also Log. b^2 = 7,4567076,
somit Log. b = 3,7283538 = Log. 5350, und
b = 5350.

Es ist daher die gesuchte Seite b = 5350, welcher die beiden gegebenen Winkel anliegen.

III. Beispiel:

Wenn der Flächeninhalt des Dreieckes oder Δ = 11979283, dann die Seite b = 5350, und der

Winkel A $\equiv$ 64° 30′, wie groß ist der andere, dieser Seite anliegende Winkel C?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 52. ist

$$\text{Cot. C} = \frac{b^2}{2\Delta} - \text{Cot. A};$$

2) Nun ist Log. Cot. A $=$ 9,6784961 $=$ Log. 4769754000, folglich Cot. A $=$ 4769754000, und es ist, wenn man mit r $= 10^{10}$ dividirt (§. 3. Zus. VI., und §. 9. Zus. IV und V.), $\frac{\text{Cot. A}}{r} = {}^{4769754000}/_{10000000000}$ $=$ 0,4769754 (II. §. 81. Zus. II.), indem Log. $\frac{\text{Cot. A}}{r}$

$=$ Log. Cot. A $-$ Log. r $=$ 9,6784961 $-$ 10
$=$ Log. ${}^{4769754000}/_{10000000000}$ $=$ Log. 0,4769754;

3) Ferner ist Log. $b^2 = 7{,}1567076$,
dann Log. $2\Delta = 7{,}3794608$,

also Log. $\frac{b^2}{2\Delta} = 0{,}0772468$

$=$ Log. 1,1946607, und $\frac{b^2}{2\Delta} = 1{,}1946607$;

4) Endlich ist 1,1946607 $-$ 0,4769754 $=$ 0,7176853, dann Log.(0,7176853 $\times$ r) $=$ Log.(0,7176853 $\times$ 10^{10}) $=$ Log.(0,7176853 $\times$ 10000000000) $=$ Log 7176853000 $=$ 9,8559341 $=$ Log. Cot. 54° 20′ $=$ Log. Cot. C, und C $=$ 54° 20′.

Es ist demnach der gesuchte Winkel C $=$ 54° 20′.

IV. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) im Dreiecke ABC der Winkel C $=$ A $=$ 54° 20′, und die Seite b $=$ 5350, welcher diese zwei Winkel anliegen, wie groß ist der Flächeninhalt dieses gleichschenklichten Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 52. ist in dieser Voraussetzung

$$\triangle = {}^1/_4 b^2 . \text{Tang. C} = ({}^1/_2 b)^2 \times \text{Tang. C};$$

2) Nun ist

$$\text{Log. } {}^1/_2 b = \text{Log. } 2675 = 3{,}4273238$$
$$\times 2$$
$$\text{also Log. } {}^1/_4 b^2 = 6{,}8546476,$$

dann L. Tang C = L. Tang. 54° 20′ = 10,1440624 — 10,

folglich Log. $\triangle$ = 6,9987100
= Log. 9970340, und $\triangle$ = 9970340.

Der Flächeninhalt des Dreieckes ist demnach = 9970340.

V. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes oder $\triangle$ = 9970340, und der Winkel A = C = 54° 20′, wie groß ist die Seite b, welcher diese zwei Winkel anliegen?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 52. ist

$$b = \sqrt{\frac{4\triangle}{\text{Tang. A}}} = \sqrt{\frac{4\triangle}{\text{Tang. C}}};$$

2) Nun ist Log. $4\triangle$ = 7,6007700,

dann L. Tang. A = L. Tang. C = 10,1440624 — 10,

also Log. b^2 = 7,4567076,

und Log. b = 3,7283538 = Log. 5350, mithin
b = 5350.

Die gesuchte Seite dieses gleichschenklichten Dreieckes ist daher = 5350.

VI. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes oder $\triangle$ = 9970340, und die Seite b = 5350, wie groß sind die beiden gleichen, dieser Seite anliegenden Winkel A und C?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 52. ist

$$\text{Tang. A} = \text{Tang. C} = \frac{4\Delta}{b^2};$$

2) Nun ist $\text{Log.}(4\Delta \times r) = 17{,}6007700,$
und $\text{Log. } b^2 = 7{,}4567076,$

---

also $\text{Log.Tang. A} = \text{Log.Tang. } C = 10{,}1440624$
$=$ Log. Tang. 54° 20′, und $A = C = 54° 20'$.
Es ist daher der Winkel $A = C = 54° 20'$.

Anmerkung: 1) Es ist bequem, und gibt das nämliche Resultat, wenn man bei der Auflösung des vorstehenden III. Beispieles bei der Bestimmung der Kotangens aus ihrem Logarithmus mit dem Halbmesser $r = 10^{10}$ nicht wirklich multiplizirt und dividirt, sondern sich die Multiplikation und Division nur vorgenommen denkt. In diesem Falle sagt man dann, es sei Cot. A = Cot. 64° 30′ = 0,4769754, dann 0,7176853 = Cot. C = Cot. 54° 20′.

2) Wenn man nach solchen Tabellen, wie im logarithmisch-trigonometrischen Handbuche von Vega vorkommen, rechnet, in welchen nicht unmittelbar die trigonometrischen Linien, sondern ihre Logarithmen nach dem Halbmesser $r = 10^{10}$ angegeben sind, so muß man bei der Auflösung dieses III. Beispieles, damit man subtrahiren kann, in der Formel »$\text{Cot. C} = \frac{b^2}{2\Delta}$ — Cot. A« aus dem Logarithmus der Kotangens von A die Größe dieser Tangens in den gewöhnlichen oder natürlichen Zahlen angeben (II. §. 113. Anmerk. 1.), man findet auch die Kotangens C in einer solchen Zahl; zu dieser sucht man den entsprechenden Logarithmus, und dann erst mittels der Tabellen aus dem Logarithmus der Kotangens von C diesen Winkel selbst.

§. 54.

III. Lehrsatz:

Wenn man eine gegebene Seite mit b, und von den beiden bekannten Winkeln den anliegenden mit A, und den gegenüber stehenden mit B be-

zeichnet, so ist der Flächeninhalt der Dreieckes,

oder (Fig. 9.)

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{2 \,.\, \text{Sin. B}}.$$

Beweis:

1) Der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

$$\Delta \text{ ist} = \frac{AC \times BD}{2} = \tfrac{1}{2}b \,.\, BD;$$

2) Man berechne die Seite AB oder c, es verhält sich (II. §. 112.)

$$c : b = \text{Sin. } C : \text{Sin. B},$$

weßhalb $c = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. B}} = \frac{b \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{\text{Sin. B}}$ (II. §. 65.);

3) Ferner ist $BD = c \,.\, \text{Sin. A}$ (§. 50. Nro. 2.), folglich

$$BD = \text{Sin. A} \times \frac{b \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{\text{Sin. B}}$$

$$= \frac{b \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{\text{Sin. B}}, \text{ und}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}b \times \frac{b \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{\text{Sin. B}}$$

$$= \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{2 \,.\, \text{Sin. B}} \text{ (II. §. 119. Nro. 5.).}$$

I. Zusatz: Im Dreiecke ist durch eine Seite, und durch zwei Winkel, wovon einer der Seite anliegt, und der andere gegenüber steht, der Flächeninhalt desselben gegeben.

II. Zusatz: Aus dem gegebenen Flächeninhalte eines Dreieckes, und aus zwei Winkeln, wovon einer der unbekannten Seite anliegt, und der andere gegenüber steht, läßt sich diese Seite berechnen.

Nach dem Lehrsatze ist

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{2 \,.\, \text{Sin. B}}, \text{ daher}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\Delta \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}\right)}$$ (Arithm. IV. §. 20.).

III. Zusatz: Sind die beiden bekannten Winkel A und B einander gleich, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

$$\Delta = \tfrac{1}{2}b^2 \,.\, \text{Sin. } 2A = \tfrac{1}{2}b^2 \,.\, \text{Sin. } 2B = b^2 \,.\, \text{Sin. A} \times \text{Cos. A} = b^2 \,.\, \text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. B},$$

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. } 2A}} = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. } 2B}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. A}}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. B}}}.$$

Denn nach dem Lehrsatze dieses §. ist

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{2 \,.\, \text{Sin. B}},$$

ist nun $A = B$, so ist $A + B = 2A = 2B$,

$$\text{und } \Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } 2A}{2 \,.\, \text{Sin. A}}$$

$$= \tfrac{1}{2}b^2 \,.\, \text{Sin. } 2A = \tfrac{1}{2}b^2 \,.\, \text{Sin. } 2B;$$

ferner ist $\text{Sin. } 2A = 2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Cos. A}$ (II. §. 83. Zus. I.), und $\text{Sin. } 2B = 2 \,.\, \text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. } B$, weßhalb

$$\Delta = \tfrac{1}{2}b^2 \times 2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. A} = b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. A} = b^2 \,.\, \text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. B},$$ und (Arithm. IV. §. 20.),

$$b = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. } 2A}} = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. } 2B}},$$

$$\text{wie auch } b = \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. A}}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. B}}}.$$

§. 55.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite $b = 450{,}8$, dann der ihr anliegende Winkel $A = 66° 50'$, und der opponirte Winkel $B = 48° 30'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des §. 54. ist

$$\Delta = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}{2 \,.\, \text{Sin. B}};$$

2) Nun ist Log. b^2 = 5,3079678,
dann Log. Sin A = 9,9634877—10,
und Log. Sin. (A + B) = 9,9560886—10,

also Log.(b^2 . Sin. A . Sin.(A+B)) = 5,2275441,
ferner Log. (2 . Sin. B) = 10,1754861—10,

folglich Log. Δ = 5,0520580
= Log. 112735, und Δ = 112735.

Der Flächeninhalt dieses Dreieckes ist daher = 112735.

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes ABC oder Δ = 112735, dann der anliegende Winkel A = 66° 50′, und der opponirte Winkel *B* = 48° 30′, wie groß ist die Seite b?

Auflösung:

1) Nach dem II. Zusatze des §. 54. ist

$$b = \sqrt{\frac{2\Delta \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + B)}}};$$

2) Nun ist Log. 2Δ = 5,3530880,
und Log. Sin. B = 9,8744561—10,

also Log. (2Δ . Sin. B) = 5,2275441,
ferner Log.(Sin. A . Sin.(A + B)) = 0,9195763—1,

mithin Log. b^2 = 5,3079678,
dann Log.b = 2,6539839 = Log.450,8, und b = 450,8.
Es ist daher die gesuchte Seite b = 450,8.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) im Dreiecke *ABC* der Winkel *A* = B = 48° 30′, und b = 896, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

1) Nach dem III. Zusatze des §. 54. ist
$\Delta = b^2 . \text{Sin. A} . \text{Cos. A} = b^2 . \text{Sin. B} . \text{Cos. B}$.

2) Nun ist Log. $b^2 = 5{,}9046160$,
Log. Sin. A $= 9{,}8744561 - 10$,
Log. Cos. A $= 9{,}8212646 - 10$,

also Log. $\Delta = 5{,}6003367$
$=$ Log. 398416, und $\Delta = 398416$.

Daher ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes $= 398416$.

IV. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes ABC oder $\Delta = 398416$, dann der Winkel $A = B = 48° 30'$, wie groß ist die Seite b, welcher der Winkel A anliegt, und der Winkel B gegenüber steht?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 54. ist

$$b = \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. } A . \text{ Cos. A}}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. B . Cos. B}}};$$

2) Nun ist Log. $\Delta = 5{,}6003367$,
und Log. (Sin. A . Cos. A) $= 0{,}6957207 - 1$,

also Log. $b^2 = 5{,}9046160$,
dann Log. $b = 2{,}9523080 =$ Log. 896, und
$b = 896$.
Die Seite b ist daher $= 896$.

§. 56.

IV. Lehrsatz:

Wenn man die zwei gegebenen Seiten eines Dreieckes durch b und c, und die bekannten Winkel, die diesen zwei Seiten gegenüber stehen, durch B und C ausdrückt, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder (Fig. 9.)

$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc . \text{Sin. } (B + C).$$

Beweis:

1) Wäre nebst den beiden Seiten nur ein gegenüber stehender Winkel, etwa B, gegeben, so berechne man zuerst diesen Winkel, es verhält sich

$$b : c = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C \text{ (II. §. 112.)},$$

$$\text{daher ist Sin. } C = \frac{c \,.\, \text{Sin. } B}{b};$$

2) Nach §. 50. Nro. 2. ist

$$BD = c \,.\, \text{Sin. } A = c \,.\, \text{Sin. } (B + C) \text{ (II. §. 65.)},$$

$$\text{und } \triangle = \tfrac{1}{2} b \,.\, BD, \text{ folglich}$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b \times c \,.\, \text{Sin. } (B + C)$$

$$= \tfrac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin. } (B + C).$$

I. Zusatz: Im Dreiecke ist durch zwei Seiten, und die beiden, diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel der Flächeninhalt desselben gegeben.

II. Zusatz: Durch zwei Seiten, und durch einen Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber steht, ist der Flächeninhalt eines Dreieckes noch nicht vollkommen bestimmt, weil man vorhin den anderen opponirten Winkel suchen muß, und ein Dreieck nur dann durch zwei Seiten und einen Winkel gegeben ist, wenn der bekannte Winkel der größeren von diesen zwei Seiten gegenüber steht (§. 48., und I. §. 34 und 35.).

III. Zusatz: Aus dem Flächeninhalte eines Dreieckes, und aus zwei Winkeln nebst einer Seite, die einem dieser Winkel gegenüber steht, kann man die andere opponirte Seite finden.

Nach dem Lehrsatze ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin. } (B + C),$$

$$\text{also } b = \frac{2\triangle}{c \,.\, \text{Sin. } (B + C)},$$

$$\text{und } c = \frac{2\triangle}{b \,.\, \text{Sin. } (B + C)} \text{ (Arithm. III. §. 98.)}.$$

IV. Zusatz: Wenn die gegebenen Seiten b und c einander gleich sind, so sind es auch die opponirten Winkel (I. §. 21.), und es ist

$\Delta = \frac{1}{2}b \,.\, b \,.\, \text{Sin.}(B + C) = \frac{1}{2}b^2 \,.\, \text{Sin.}(B + C)$
$= \frac{1}{2}c^2 \,.\, \text{Sin.}(B + C)$, und

$$b = c = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin.}(B + C)}};$$ weßhalb auch

$\Delta = \frac{1}{2}b^2 \,.\, \text{Sin. } 2B = \frac{1}{2}c^2 \,.\, \text{Sin. } 2C$
$= b^2 \,.\, \text{Sin. } B \,.\, \text{Cos. } B = c^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Cos. } C$,

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. } 2B}} = \sqrt{\frac{2\Delta}{\text{Sin. } 2C}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. B}}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\text{Sin. C} \,.\, \text{Cos. } C}}$$ (II. §. 83. Zuſ. 1.).

§. 57.

Beiſpiele zum vorigen §.

I. Beiſpiel:

Wenn (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite $b = 336$, dann die Seite $c = 224$, ferner der Winkel $B = 26° 37'$, und der Winkel $C = 17° 22'$, wie groß iſt der Flächeninhalt dieſes Dreieckes?

Auflöſung:

1) Nach dem Lehrſatze des §. 56. iſt nach dieſen gegebenen Stücken

$$\Delta = \frac{1}{2}b \,.\, c \,.\, \text{Sin.}(B + C);$$

2) Nun iſt

$\text{Log. } \frac{1}{2}b = \text{Log. } 168 = 2{,}2253093,$
dann $\text{Log. } c = \text{Log. } 224 = 2{,}3502480,$
und $\text{L.Sin.}(B+C) = \text{L.Sin.} 43° 59' = 9{,}8416404 - 10,$

also $\text{Log. } \Delta = 4{,}4171977$
$= \text{Log. } 26133{,}5$, und $\Delta = 26133{,}5$.

Der Flächeninhalt dieſes Dreieckes iſt daher $= 26133{,}5$.

II. Beiſpiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des Dreieckes ABC oder $\Delta = 26133{,}5$, dann die Seite $c = 224$,

ferner der Winkel $B = 26° 37'$, und der Winkel $C = 17° 22'$, wie groß ist die andere opponirte Seite b?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 56. ist

$$b = \frac{2\Delta}{c \,.\, \text{Sin.}\,(B + C)};$$

2) Nun ist $\text{Log.}\, 2\Delta = 4{,}7182277,$
und $\text{Log.}\,(c \,.\, \text{Sin.}\,(B + C)) = 2{,}1918884,$

also $\text{Log.}\, b = 2{,}5263393$
$= \text{Log.}\, 336$, und $b = 336$.

Daher ist die gesuchte Seite $b = 336$, welche dem anderen bekannten Winkel gegenüber steht.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite $b = c = 336$, und der Winkel $B = C = 26° 37'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses gleichschenklichten Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 56. ist
$\Delta = b^2 \,.\, \text{Sin.}\, B \,.\, \text{Cos.}\, B = c^2 \,.\, \text{Sin.}\, C \,.\, \text{Cos.}\, C;$

2) Nun ist $\text{Log.}\, b^2 = 5{,}0526786,$
$\text{Log. Sin. B} = 9{,}6512966 - 10,$
$\text{Log. Cos. B} = 9{,}9513492 - 10,$

also $\text{Log.}\, \Delta = 4{,}6553244$
$= \text{Log.}\, 45219{,}35$, und $\Delta = 45219{,}35$.

Der Flächeninhalt dieses gleichschenklichten Dreieckes ist daher $= 45219{,}35$.

IV. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) der Flächeninhalt des gleichschenklichten Dreieckes ABC oder $\Delta = 45219{,}35$, dann

der Winkel $B = C = 26° 37'$, wie groß sind die beiden, sich gleichen Seiten b und c?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des §. 56. ist

$$b = c = \sqrt{\frac{\triangle}{\text{Sin. B . Cos. B}}} = \sqrt{\frac{\triangle}{\text{Sin. } C \text{ . Cos. } C}};$$

2) Nun ist $\text{Log. } \triangle = 4{,}6553244,$
und $\text{Log. (Sin. B . Cos. B)} = 0{,}6026458 - 1,$

also $\text{Log. } b^2 = \text{Log. } c^2 = 5{,}0526786,$
dann $\text{Log. } b = \text{Log. } c = 2{,}5263393 = \text{Log. } 336,$
und $b = c = 336.$

Daher ist die gesuchte Seite $b = c = 336.$

§. 58.

V. Lehrsatz:

Wenn die Summe der drei Dreiecksseiten ausgedrückt wird durch S, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

$$\triangle = \sqrt{(\tfrac{1}{2}S \cdot (\tfrac{1}{2}S - a)\ (\tfrac{1}{2}S - b)\ (\tfrac{1}{2}S - c))}.$$

Beweis:

1) Man bezeichne (Fig. 9.) Dreieckshöhe BD mit f, und die Abschnitte der Grundlinie AC, nämlich lich AD und DC mit x und y;

2) Man suche einen Ausdruck für die Abszisse x,
es ist $c^2 - x^2 = f^2$ (I. §. 97. Zus. II.),
und $a^2 - y^2 = f^2$, wie auch $y = b - x$,
also $c^2 - x^2 = a^2 - y^2$,
und $c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2$,
folglich $c^2 = a^2 - b^2 + 2bx$,

$$\text{und } x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b};$$

3) Nun bestimme man aus den drei Seiten des Dreieckes die Höhe f, es ist (I. §. 97. Zus. II.)

$$f^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\ (c - x)$$

$$= (c + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}) (c - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b})$$

$$= \left(\frac{2bc + c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right) \left(\frac{2bc - c^2 - b^2 + a^2}{2b}\right)$$

$$= \frac{((b + c)^2 - a^2)\ (a^2 - (c - b)^2)}{4b^2}$$

$$= \frac{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}{4b^2}$$

$$= ((a + b + c)\ (a + b + c - 2a)\ (a + b + c - 2b) \times (a + b + c - 2c)) : 4b^2.$$

Man setze S anstatt $a + b + c$, es ist

$$f^2 = \frac{S \cdot (S - 2a)\ (S - 2b)\ (S - 2c)}{4b^2}$$

$$= \frac{(S \cdot (S - 2a)\ (S - 2b)\ (S - 2c)) \times 1/16}{4b^2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2}$$

$$= \frac{1/2S \cdot (1/2S - a)\ (1/2S - b)\ (1/2S - c)}{1/4b^2},$$

folglich ist die Höhe

$$f = \frac{\sqrt{(1/2S \cdot (1/2S - a)\ (1/2S - b)\ (1/2S - c))}}{1/2b}.$$

4) Der Flächeninhalt des Dreieckes ist

$= 1/2b \cdot BD = 1/2b \cdot f$, somit

$$\Delta = \frac{1/2b \cdot \sqrt{(1/2S \cdot (1/2S - a)\ (1/2S - b)\ (1/2S - c))}}{1/2b}$$

$$= \sqrt{(1/2S \cdot (1/2S - a)\ (1/2S - b)\ (1/2S - c))}.$$

I. Zusatz: Die in dieser Formel vorkommenden drei Differenzen geben zusammen wieder die halbe Summe der drei Dreiecksseiten; indem $(1/2S - a) + (1/2S - b) + (1/2S - c) = 3/2S - a - b - c = 3/2S - (a + b + c) = 3/2\,S - S = 1/2S$.

II. Zusatz: Wenn (Fig. 9.) das Dreieck ABC gleichseitig ist, und somit $a = b = c$, so ist $S = a + b + c = 3a$, und $\frac{1}{2}S = \frac{3}{2}a$, dann $\frac{1}{2}S - a = \frac{1}{2}a$, ferner $\frac{1}{2}S - b = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$, und $\frac{1}{2}S - c = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$, weßhalb

$$\Delta = \sqrt{(\tfrac{3}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}a)}$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{16}a^4} = \sqrt{(\tfrac{1}{16} \times a^4 \times 3)}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 \times \sqrt{3} = (\tfrac{1}{2}a)^2 \times \sqrt{3}$$ (II. §. 110. Zus.).

III. Zusatz: Ist die Summe der drei Dreiecksseiten $= S$, also wieder $a + b + c = S$, so ist, da $a + b + c - 2a = b + c - a$, dann $a + b + c - 2b = a + c - b$, und $a + b + c - 2c = a + b - c$, die erste Differenz oder $S - 2a = b + c - a$, dann $S - 2b = a + c - b$, und $S - 2c = a + b - c$, und daher (II. §. 117. Zus. I. und III., und §. 127. Auflös. II.)

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{((a + b + c)\,(b + c - a)\,(a + c - b) \times (a + b - c))}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(S \cdot (S - 2a)\,(S - 2b)\,(S - 2c))}.$$

Anmerkung: 1) Diese zwei Formeln sind zur Berechnung nicht so einfach, wie die im Lehrsatze dieses §. aufgestellte Formel; von denselben ist die letztere für die Berechnungen bequemer.

2) Wenn man den im II. Theile dieses Lehrbuches im §. 117. angeführten Beweis rücksichtlich der im vorstehenden III. Zusatze vorkommenden Formel betrachtet, so findet man aus meinem Lehrbuche der Arithmetik die algebraischen Veränderungen nachgewiesen, welche bei der Beweisesführung des vorstehenden Lehrsatzes vorkommen.

Man setzt nämlich Gleiches anstatt des Gleichen (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.), man erhebt zum Quadrate (Arithm. IV. §. 1.), man bestimmt die Größe x (Arithm. III. §. 98.), man löset in Faktoren auf (Arithm. III. §. 87. Nro. V. und VI.), man setzt $a - 2a$ anstatt $- a$, dann $b - 2b$ anstatt $- b$, und $c - 2c$ anstatt $- c$, man multiplizirt den Zähler und Nenner des Bruches mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ (Arithm. III. §. 66. d. und §. 71.), man zieht die Quadratwurzel wirklich aus (Arithm. III. §. 71. Zus. I., und §. 72. Zus. I.), und verkleinert endlich den Bruch (Arithm. III. §. 66. f.).

3) Aus dem bekaunten Flächeninhalte, und aus den drei gegebenen Seiten eines Dreieckes berechnet man die drei Winkel eines Dreieckes nicht, da man diese unmittelbar aus den drei Seiten finden kann (§. 8., und II. §. 122.).

4) Wenn man außer den im Lehrsatze, und im III. Zusatze dieses §. angeführten Formeln nach anderen allgemein giltigen Vorschriften aus den drei gegebenen Seiten eines Dreieckes den Flächeninhalt des letzteren berechnen will, so findet man im II. Theile dieses Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie im III. Zusatze des §. 117., und im V. Zusatze des §. 118. die benöthigte Anweisung, und in den §§. 122 und 127. hierzu sammt einem Beispiele die betreffenden allgemeinen Auflösungen.

§. 59.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 9.) im Dreiecke ABC die Seite $a = 184$, dann $b = 159$, und $c = 103$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

I. Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des §. 58. ist

$$\Delta = \sqrt{(\tfrac{1}{2}s \cdot (\tfrac{1}{2}s - a)\ (\tfrac{1}{2}s - b)\ (\tfrac{1}{2}s - c))};$$

2) Nun ist $s = a + b + c = 446$, und $\tfrac{1}{2}s = 223$, also $\tfrac{1}{2}s - a = 39$, ferner $\tfrac{1}{2}s - b = 64$, und $\tfrac{1}{2}s - c = 120$;

3) Uiberdieß ist

$$\begin{aligned} Log.\ \tfrac{1}{2}s &= Log.\ 223 = 2{,}3483049, \\ Log.\ (\tfrac{1}{2}s - a) &= Log.\ 39 = 1{,}5910646, \\ Log.\ (\tfrac{1}{2}s - b) &= Log.\ 64 = 1{,}8061800, \\ Log.\ (\tfrac{1}{2}s - c) &= Log.\ 120 = 2{,}0791812, \\ \hline &= 7{,}8247307, \end{aligned}$$

mithin $Log.\ \Delta = 3{,}9123653 = Log.\ 8172{,}69$,
und $\Delta = 8172{,}69$.

Der Flächeninhalt dieses Dreieckes ist $= 8172{,}69$.

II. Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 58. ist
$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(S \cdot (S - 2a)\ (S - 2b)\ (S - 2c))}$;

2) Nun ist wieder $S = 446$, also $S - 2a = 78$, dann $S - 2b = 128$, und $S - 2c = 240$;

3) Uiberdieß ist

$$\begin{aligned} Log.\ S &= Log.\ 446 = 2{,}6493349, \\ Log.\ (S - 2a) &= Log.\ 78 = 1{,}8920946, \\ Log.\ (S - 2b) &= Log.\ 128 = 2{,}1072100, \\ Log.\ (S - 2c) &= Log.\ 240 = 2{,}3802112, \\ \hline &= 9{,}0288507, \end{aligned}$$

und der Logarithmus der Wurzel $= 4{,}5144253$,
ferner $Log.\ 4 = 0{,}6020600$,
folglich $Log.\ \Delta = 3{,}9123653$,
$= Log.\ 8172{,}69$, und $\Delta = 8172{,}69$.

Der Flächeninhalt dieses Dreieckes ist demnach wieder $= 8172{,}69$.

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 9.) die Seite a eines gleichseitigen Dreieckes $= 850$, wie groß ist dessen Flächeninhalt?

Auflösung:

1) Nach dem II. Zusatze des §. 58. ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, oder
$\Delta = \frac{1}{4}a^2 \times \sqrt{3} = (\frac{1}{2}a)^2 \times \sqrt{3}$;

2) Nun ist
$Log.\ \frac{1}{4}a^2 = Log.\ (\frac{1}{2}a)^2 = Log.\ 425^2 = 5{,}2567778$,
und $Log.\ \sqrt{3} = 1{,}2385606$,
also $Log.\ \Delta = 5{,}4953384$
$= Log.\ 312851{,}6$, und $\Delta = 312851{,}6$.

Der Flächeninhalt dieses gleichseitigen Dreieckes ist daher $= 312851{,}6$.

Anmerkung: 1) Wenn man beim vorstehenden I. Beispiele die erste Auflösung mit der zweiten vergleicht, so wird man sehen, daß jene einfacher und bequemer ist (§. 58. Anmerk. 1.).

2)

2) Da man bei den Aufgaben des §. 60 und 62. bei Dreiecken aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite berechnet, so könnte man eine solche, etwa AC im Dreiecke ABC Fig. 23 und 24.), auch nach der Formel finden »AC = $ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\,\text{Cos.}B\right)$, und $AC=\sqrt{\left(ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\,\text{Cos.}\,B\right)\right)}$«; indem nach den erwähnten Lehrsätzen $AC^2 = a^2+b^2-2ab\,.\,\text{Cos.}\,B$), und $AC^2 = ab\left(\frac{a^2+b^2-2ab\,.\,\text{Cos.}\,B}{ab}\right) = ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\,\text{Cos.}\,B\right)$, weßhalb auch $AC=\sqrt{\left(ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\,\text{Cos.}\,B\right)\right)}$ (§. 9., und Arithm. III. §. 66. d.).

3) Um die Berechnungen, welche sowohl bei den Dreiecksflächen, und bei den Vierecks- und Vielecksflächen vorkommen, nicht für ein bestimmtes, etwa in Bayern übliches Flächenmaaß zu beschränken, so werden auch in diesem Hauptstücke, wie es bereits in den vorausgehenden Hauptstücken hinsichtlich der geradlinigten ebenen Figuren geschehen ist, die Linien und Flächen auf kein bestimmtes Längen- und Flächen-Maaß bezogen.

Will man die Resultate nach einem bestimmten Längen- und Flächen-Maaße, etwa nach dem bayerischen, angeben, so darf man nur voraussetzen, es seien die gegebenen Seiten und die bekannten Flächen der Figuren in bayerischen Schuhen und Quadratschuhen ausgedrückt; es ergeben sich dann auch die gesuchten Linien in diesem Längenmaaße, und die Flächen werden nach bayerischen Quadratschuhen bestimmt (I. §. 152 und 153.).

§. 60.

I. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen Figur aus allen bekannten Seiten und Winkeln nach der Triangulär-Methode den Flä-

cheninhalt zu finden, wenn durch die gezogenen Diagonallinien für die Berechnung der unbekannten Dreieckswinkel die Polygonswinkel nur in zwei Theile getheilt werden.

I. Auflösung:

1) Es seien (Fig. 23.) im Sechsecke ABCDEF, bei welchem alle Seiten und Winkel gegeben sind, durch die Diagonalen AC, AD und AE die Polygonswinkel C, D und E jedesmal nur in zwei Theile getheilt, um für die Flächenberechnung der Dreiecke die bei den Scheitelpunkten dieser Winkel vorkommenden Dreieckswinkel zu bestimmen.

2) Im Dreiecke ABC kann man aus den Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel B sowohl dessen Flächeninhalt, als auch die Diagonallinie AC und den Winkel α berechnen. Nach §. 9. und nach §. 50., so wie auch nach dem III. Zusatze des letzteren §., und nach §. 7. ist

$$\triangle ABC = \frac{a \,.\, b \,.\, \text{Sin. } B}{2}, \text{ also } 2\triangle ABC = a \,.\, b \times \text{Sin. B},$$

dann $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. B}$, ferner $AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. B})}$;

$$\text{und Sin. BCA} = \text{Sin. } \alpha = \frac{2\triangle}{b \,.\, AC},$$

$$\text{oder Tang. } \alpha = \frac{a \,.\, \text{Sin. B}}{b - a \,.\, \text{Cos. B}}.$$

3) Durch die Winkel C und α ist der Winkel ACD bestimmt, es ist dieser oder $\beta = C - \alpha$, und daher ist nach dem eben angeführten Lehrsätzen, und nach dem erwähnten Zusatze

$$\triangle ACD = \frac{c \,.\, AC \,.\, \text{Sin. } \beta}{2}, \text{ mithin } 2\triangle ACD = c \times AC \,.\, \text{Sin. } \beta, \text{ dann } AD^2 = c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC \times \text{Cos. } \beta, \text{ ferner } AD = \sqrt{(c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC \times \text{Cos. } \beta)},$$

$$\text{und Sin. } ADC = \text{Sin. } \gamma = \frac{2\triangle \text{ ACD}}{\text{c . AD}},$$

$$\text{oder Tang. } \gamma = \frac{AC \text{ . Sin. } \beta}{\text{c} - \text{AC . Cos. } \beta}.$$

4) Durch die Winkel γ und D ist der Winkel ADE bestimmt, es ist dieser oder $\delta = \text{D} - \gamma$, und daher nach §. 50.

$$\triangle \text{ ADE} = \frac{\text{d . AD . Sin. } \delta}{2}, \text{ folglich } 2\triangle \text{ ADE} = \text{d . AD . Sin. } \delta.$$

5) Nach dem nämlichen §. ist im letzten Dreiecke wegen der bekannten Seiten e und f, und dem bekannten, von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel F der Flächeninhalt dieses Dreieckes, oder

$$\triangle \text{ AEF} = \frac{\text{e . f . Sin. } F}{2}, \text{ und } 2\triangle \text{ AEF} = \text{e . f} \times \text{Sin. F.}$$

6) Will man aus den bekannten Stücken der vorausgehenden Dreiecke auch den Flächeninhalt des letzten Dreieckes AEF finden, so berechnet man bei dem unmittelbar vorausgehenden Dreiecke ADE den Winkel AED oder ε, und die Diagonallinie AE, es ist

$$AE = \sqrt{(\text{d}^2 + \text{AD}^2 - 2\text{d . AD . Cos. } \delta)},$$

$$\text{und Sin. } \varepsilon = \frac{2\triangle}{\text{d . AE}},$$

$$\text{wie auch Tang. } \varepsilon = \frac{\text{AD . Sin. } \delta}{\text{d} - \text{AD . Cos. } \delta}.$$

Daraus ergibt sich der Winkel AEF oder μ, und der Flächeninhalt des Dreieckes AFE; es ist der Winkel AEF, oder

$$\mu = DEF - AED = \text{E} - \varepsilon,$$

$$\text{und } \triangle \text{ AEF} = \frac{\text{e . AE . Sin. } \mu}{2},$$

$$\text{somit } 2\triangle \text{ AEF} = \text{e . } AE \text{ . Sin. } \mu.$$

7) Die Summe der Flächen dieser vier Dreiecke gibt den Flächeninhalt der ganzen Figur; dieser ist, oder Polyg. $= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF = \frac{1}{2}(2\triangle ABC + 2\triangle ACD + 2\triangle ADE + 2\triangle AEF)$.

II. Auflösung:

1) Man berechne (Fig. 23.) den Flächeninhalt der ersten zwei Dreiecke ABC und ACD auf die vorige Weise, bestimme aber beim Dreiecke ACD, wenn man zur Probe die nämlichen Stücke nicht zweimal berechnen will, den Winkel γ und die Diagonallinie AD nicht mehr; es ist nach der vorigen Auflösung

$$2\triangle ABC = a \,.\, b \,.\, \text{Sin. B},$$

und $2\triangle ACD = c \,.\, AC \,.\, \text{Sin.}\ \beta$.

2) Man berechne, da man nur vier Dreiecke hat, jetzt den Flächeninhalt des letzten Dreieckes AEF, und bestimme bei diesen auch den Winkel AEF oder μ, und die Diagonal AE, es ergibt sich daraus der Winkel AED oder ε, und der Flächeninhalt des Dreieckes AED; indem

$$\triangle AEF = \frac{e \,.\, f \,.\, \text{Sin. F}}{2}, \text{ also } 2\triangle AEF = e \,.\, f \,.\, \text{Sin. F},$$

$$\text{dann } AE^2 = e^2 + f^2 - 2ef \,.\, \text{Cos. F},$$

$$\text{mithin } AE = \sqrt{(e^2 + f^2 - 2ef \,.\, \text{Cos. F})},$$

$$\text{ferner Sin. } \mu = \frac{2\triangle AEF}{e \,.\, AE},$$

$$\text{oder Tang. } \mu = \frac{f \,.\, \text{Sin. } F}{e - f \,.\, \text{Cos. } F},$$

und $\varepsilon = E - \mu$, folglich $2\triangle AED = d \,.\, AE \,.\, \text{Sin.}\ \varepsilon$.

3) Will man eine Probe über die geführte Rechnung machen, so kann man das Dreieck ADE aus den Dreiecken ABC und ACD, und auch aus dem Dreiecke AEF bestimmen, oder man kann eine Diagonallinie, etwa AD, zweimal berechnen; es ist

$$AD = \sqrt{(c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC \,.\, \text{Cos.}\ \beta)},$$

und $AD = \sqrt{(d^2 + AE^2 - 2d \,.\, AE \,.\, \text{Cos.}\ \varepsilon)}$.

Zusatz: Wenn man bei diesen zwei Auflösungen, bei welchen man die Winkel mittels des Sinus aus dem Flächeninhalte bestimmen kann, nicht schon aus der Beschaffenheit der Figur zum Voraus weiß, ob dieselben spitzig oder stumpf sind, so berechne man die Winkel α, γ ꝛc., oder die Winkel μ, δ ꝛc. mittels der Tangens nach dem im §. 7. aufgestellten Lehrsatze (§. 48. h.). Wird die Tangens positiv, so ist der gefundene spitzige Winkel zu behalten, und wird sie negativ, so muß man jenen stumpfen Winkel nehmen, zu dem der gefundene der Supplementswinkel ist (II. §. 64., und §. 74 und 78.).

Anmerkung: 1) Wenn man bei der vorstehenden I. Auflösung nach Nro. 5 und 6. den Flächeninhalt des letzten Dreieckes AFE sowohl aus den Seiten e und f und dem eingeschlossenen Winkel F, als auch aus den Seiten AE und EF, und dem Winkel μ berechnet, so ist $\frac{1}{2}e \cdot f \cdot \text{Sin. } F = \frac{1}{2}e \cdot AE \cdot \text{Sin. } \mu$, gleichwie $\triangle AEF = \triangle AEF$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 1.) und man wird aus der größeren oder kleineren Differenz ersehen, in wie ferne man richtig gerechnet hat.

2) Weil man bei der Berechnung einer jeden Dreiecksfläche das erhaltene Produkt mit 2 dividiren soll, so kann man bei den einzelnen Rechnungen diese Division unterlassen, und am Ende die Summe aller doppelten Dreiecke mit 2 dividiren, um den Flächeninhalt des Vieleckes zu erhalten (Arithm. III. §. 53.); es ist (Fig. 23.) der Flächeninhalt des Sechseckes, oder Polyg. $ABCDEF = \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF = \frac{1}{2}(2\triangle ABC + 2\triangle ACD + 2\triangle ADE + 2\triangle AEF) = \frac{1}{2}(a \cdot b \cdot \text{Sin. } B + c \cdot AC \cdot \text{Sin. } \beta + d \cdot AD \times \text{Sin. } \delta + e \cdot AE \cdot \text{Sin. } \mu) = \frac{1}{2}(a \cdot b \cdot \text{Sin. } B + c \cdot AC \cdot \text{Sin. } \beta + e \cdot f \cdot \text{Sin. } F + d \cdot AE \cdot \text{Sin. } \varepsilon)$.

§. 61.

Beispiel zur Aufgabe des vorigen §.

Man soll (*Fig.* 23.) den Flächeninhalt des Sechseckes ABCDEF berechnen, wenn alle Seiten und

Winkel bekannt sind, und dieselben folgende Größe haben:

Die gegebenen Seiten. { a = 114, b = 98,5, c = 55, d = 89, e = 100,85, f = 154;

Die gegebenen Winkel. { A = 112° 16', B = 107° 7', C = 148° 21', D = 112° 22', E = 162° 30', F = 77° 24'.

I. Auflösung:

1) Man ziehe von A zu den Ecken C, D und E die Diagonalen AC, AD und AE, es entstehen die Dreiecke ABC, ACD, ADE und AEF, derer Flächen zusammen den Flächeninhalt des Vieleckes geben;

2) Nach §. 60. ist

$$\Delta = \frac{a \,.\, b \,.\, \mathit{Sin.}\, B}{2}, \text{ also } 2\Delta = a \,.\, b \,.\, \mathrm{Sin.}\, B,$$

dann $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \mathrm{Cos.}\, B$,
und $AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \mathrm{Cos.}\, B)}$,

wie auch $\mathrm{Sin.}\, BCA = \mathrm{Sin.}\, \alpha = \frac{2\Delta}{b \,.\, AC}$,

oder $\mathrm{Tang.}\, \alpha = \frac{a \,.\, \mathit{Sin.}\, B}{b - a \,.\, \mathrm{Cos.}\, B}$.

3) Nun ist der Winkel $B = 107° 7'$, mithin $\mathrm{Sin.}\, B = \mathrm{Sin.}\, 72° 53'$, und $\mathrm{Cos.}\, B = -\mathrm{Cos.}\, 72° 53'$; überdieß ist

$\mathrm{Log.}\, a = \mathrm{Log.}\, 114 = 2{,}0569049,$
dann $\mathrm{Log.}\, b = \mathrm{Log.}\, 98{,}5 = 1{,}9934362,$
und $\mathrm{Log.}\, \mathrm{Sin.}\, B = 9{,}9803250 - 10,$

also $\mathrm{Log.}\, 2\Delta\, ABC = 4{,}0306661$
$= \mathrm{Log.}\, 10731{,}64$, und $2\Delta\, ABC = 10731{,}64$.

4) Ferner ist $a^2 = 12996,$
dann $+ b^2 = 9702{,}25,$
und $- 2ab \,.\, \mathrm{Cos.}\, B = 6609{,}8,$

also $AC^2 = 29308{,}05,$
und $AC = 171{,}196.$

Log. (2△ ABC × r) = 14,0306661,
und Log. (b . AC) = 4,2269292,

also Log. Sin. α = 9,8037369
= Log. Sin. 39° 31′ 28″, und α = 39° 31′ 28″, wie auch ACD = β = C — α = 108° 49′ 32″, weil der Winkel B stumpf, und deßhalb der Winkel α spitzig ist.

5) Im Dreiecke ACD ist nach §. 60.

$$\triangle ACD = \frac{c \,.\, AC \,.\, \text{Sin. } \beta}{2}, \text{ also } 2\triangle ACD = c \,.\, AC$$

× Sin. β, dann $AD^2 = c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC$
× Cos. β, und $AD = \sqrt{(c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC}$
× Cos. β), wie auch Sin. CDA = Sin. γ

$$= \frac{2\triangle ACD}{c \,.\, AD}.$$

6) Weil β = 108° 49′ 32″, so ist Sin. β = Sin. 71° 10′ 28″, und Cos. β = — Cos. 71° 10′ 28″; ferner ist

Log. c = Log. 55 = 1,7403627,
dann Log. AC = 2,2334931,
und Log. Sin. β = 9,9761231 — 10,

also Log. 2△ ACD = 3,9499789
= Log. 8912,08, und 2△ ACD = 8912,08;

dann
$c^2 = 3025$
$+ AC^2 = 29308{,}05$
$- 2c \,.\, AC \,.\, \text{Cos. } \beta = 6076{,}71$

also $AD^2 = 38409{,}76$,
und AD = 195,98;
überdieß ist Log. (2△ ACD × r) = 13,9499789,
und Log. (c . AD) = 4,0325835,

also Log. Sin. γ = 9,9173954
= Log. Sin. 55° 46′ 13″, und γ = 55° 46′ 13″, wie auch ADE = δ = D — γ = 56° 35′ 47″, da der Winkel β stumpf, und deßhalb der Winkel γ spitzig ist.

7) Im Dreiecke ADE ist

$$\triangle ADE = \frac{d \cdot AD \cdot \text{Sin. } \delta}{2}, \text{ also } 2\triangle ADE = d \times AD \cdot \text{Sin. } \delta.$$

8) Nach Nro. 6. ist der Winkel $\delta = 56^\circ\ 35'\ 47''$, folglich $\text{Sin. } \delta = \text{Sin. } 56^\circ\ 35'\ 47''$; ferner ist

$$\text{Log. } d = 1{,}9493900,$$

dann $\text{Log. } AD = 2{,}2922208,$

und $\text{Log. Sin. } \delta = 9{,}9215893 - 10,$

also $\text{Log. } 2\triangle ADE = 4{,}1632001$

$= \text{Log. } 14561{,}33$, und $2\triangle ADE = 14561{,}33$;

9) Der Flächeninhalt des letzten Dreieckes AEF kann unmittelbar aus der Seite $e = 100{,}85$, dann aus der Seite $f = 154$, und aus dem Winkel $F = 77^\circ\ 24'$ gefunden werden; es ist

$$\triangle AEF = \tfrac{1}{2} e \cdot f \cdot \text{Sin. } F, \text{ also } 2\triangle AEF = ef \cdot \text{Sin. } F.$$

Nun ist $\text{Log. } e = 2{,}0036759,$

dann $\text{Log. } f = 2{,}1875207,$

und $\text{Log. Sin. } F = 9{,}9894128 - 10,$

also $\text{Log. } 2\triangle AEF = 4{,}1806094$

$= \text{Log. } 15156{,}86$, und $2\triangle AEF = 15156{,}86$.

10) Den Flächeninhalt dieser vier doppelten Dreiecke bringe man in eine Summe, und dividire diese mit 2, um den Flächeninhalt des Sechseckes zu erhalten; es ist

$$\begin{aligned} 2\triangle ABC &= 10731{,}64 \\ + 2\triangle ACD &= 8912{,}08 \\ + 2\triangle ADE &= 14561{,}33 \\ + 2\triangle AEF &= 15156{,}86 \end{aligned}$$

also $2 \text{ Polyg. } ABCDEF = 49361{,}91,$

und $\text{Polyg. } ABCDEF = 24680{,}955.$

II. Auflösung:

1) Man berechne den Flächeninhalt der Dreiecke ABC, ACD und AEF auf die vorige Weise; es ist

$2\triangle ABC = 10731{,}64,$
dann $2\triangle ACD = 8912{,}08,$
und $2\triangle AEF = 15156{,}86.$

2) Man berechne im Dreiecke AEF zur Flächenbestimmung des Dreieckes ADE die Diagonal AE, und den Winkel μ mittels der Tangens nach §. 7., weil der bekannte Winkel F spitzig ist, und man deßhalb zum Voraus nicht weiß, ob der Winkel μ spitzig oder stumpf ist; außer man würde aus den Stücken e, f und F zuerst die Seite AE berechnen: findet man diese größer als AF oder f, so erkennt man daraus auch, daß der Winkel μ spitzig ist, indem der bekannte Winkel F spitzig ist, und der kleineren Seite auch der kleinere Winkel gegenüber steht (I. §. 30.). Es ist

$$\text{Tang. } \mu = \frac{f \,.\, \text{Sin. } F}{e - f \,.\, \text{Cos. } F},$$

$$\text{und } AE = \frac{f \,.\, \text{Sin. } F}{Sin.\ \mu} \text{ (II. §. 112.,}$$

oder $AE^2 = e^2 + f^2 - 2ef \,.\, Cos.\ F,$
mithin $AE = \sqrt{(e^2 + f^2 - 2ef.\ \text{Cos. } F)},$
und $2\triangle AED = d \,.\, AE \,.\, \text{Sin. } \varepsilon.$

Nun ist

L. f = L. 154 = 2,1875207,	Log. 154 = 2,1875207,
Log. Sin. F = 9,9894128 — 10,	Log. Cos. F = 9,3387418 — 10,
= 2,1769335;	= 1,5262625
	= Log. 33,594.

$e = +\ 100{,}85$
$-f \,.\, \text{Cos. } F = -\ 33{,}594$
also $e - f \,.\, Cos.\ F = +\ 67{,}256;$

$\text{Log. } (f \,.\, \text{Sin. } F \times r) = 12{,}1769335$
$\text{Log. } 67{,}266 = 1{,}8277310$

folglich Log. Tang. $\mu = 10{,}3492025$
= Log. Tang. 65° 53′ 28″, und $\mu = 65°\ 53'\ 28''$, weil die Tangens positiv, und deßhalb der Winkel μ spitzig ist.

3) Aus dem Winkel μ, und dem Winkel E berechne man den Winkel ε; es ist

$E = 162^\circ\ 30' = {}^\circ\ 161^\circ\ 89'\ 60''$,

und $\mu = 65^\circ\ 53'\ 28''$,

---

also $E - \mu = \varepsilon = 96^\circ\ 36'\ 32''$,

weßhalb Sin. ε = Sin. $83^\circ\ 23'\ 28''$.

4) Uiberdieß ist

Log. f = Log. 154 = 2,1875207,

und Log. Sin. F = 9,9894128 — 10,

---

also Log. (f . Sin. F) = 2,1769335,

dann Log. Sin. μ = 9,9603618 — 10,

---

folglich Log. AE = 2,2165717,

ferner Log. d = 1,9493900,

und Log. Sin. ε = 9,9971045 — 10,

---

mithin Log. $2\triangle$ ADE = 4,1630662

= Log. 14556,8, und $2\triangle$ ADE = 14556,8.

5) Man bringe diese vier Dreiecke wieder in eine Summe, um den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes zu erhalten; es ist

$2\triangle$ ABC = 10731,64

$+ 2\triangle$ ACD = 8912,08

$+ 2\triangle$ AEF = 15156,86

$+ 2\triangle$ ADE = 14556,8

---

also 2 Polyg. ABCDEF = 49357,38,

und Polyg. ABCDFF = 24678,69.

Anmerkung: 1) Man erhält nach der vorstehenden II. Auflösung den Flächeninhalt auf eine einfachere Weise, als nach der I. Auflösung, weil nach jener der Flächeninhalt der einzelnen Dreiecke mehr aus den gegebenen, als aus den berechneten Stücken bestimmt wurde.

2) Will man den Flächeninhalt des letzten Dreieckes AEF aus den Seiten AE und EF und dem Winkel μ finden, so muß man zur Bestimmung dieser Stücke im unmittelbar vorausgehenden Dreiecke AEF nebst dem Flächeninhalte auch die Diagonal AE, und den Winkel ε berechnen.

§. 62.

II. Aufgabe, bei einer geradlinigten ebenen

Figur aus allen bekannten Seiten und Win-Winkeln nach der Triangulär-Methode den Flächeninhalt zu finden, wann durch die gezogenen Diagonalen für die Berechnung der unbekannten Dreieckswinkel die Polygonswinkel in mehr als zwei Theile getheilt werden.

Auflösung:

1) Es seien (Fig. 24.) im Siebenecke ABCDEFG, bei welchem alle Seiten und Winkel gegeben sind, durch die Diagonalen AC, AD, GD, und GE die Polygonswinkel so getheilt, daß beim Winkel A, bei welchem man der Kürze wegen zur Berechnung des Dreieckes ADG die Diagonal AD bestimmt, die drei Theile γ, δ und ε vorkommen, und es kann da der Winkel ε aus dem Winkel A und γ allein nicht bestimmt werden.

2) Nach den angeführten Lehrsätzen ist im Dreiecke ABC

$$2\triangle ABC = a \,.\, b \,.\, \text{Sin. } B,$$

dann $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. } B,$

und $AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cos. } B)},$

wie auch $\text{Sin. } BCA = \text{Sin. } \alpha = \dfrac{2\triangle ABC}{b \,.\, AC},$

oder $\text{Tang. } \alpha = \dfrac{a \,.\, \text{Sin. } B}{b - a \,.\, \text{Cos. } B}.$

3) Da $ACD = \beta = C - \alpha$, so ist im Dreiecke ACD

$$2\triangle ACD = c \,.\, AC \,.\, \text{Sin. } \beta,$$

und $AD^2 = c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC \,.\, \text{Cos. } \beta,$

also $AD = \sqrt{(c^2 + AC^2 - 2c \,.\, AC \,.\, \text{Cos. } \beta},$

wie auch $\text{Tang. } \delta = \dfrac{c \,.\, \text{Sin. } \beta}{AC - c \,.\, \text{Cos. } \beta}.$

4) Aus dem gegebenen Winkel A, und aus den gefundenen Winkeln γ und δ kann man den Winkel

DAG oder ε, und aus den Seiten AD und AG, und dem Winkel ε den Flächeninhalt des Dreieckes ADG finden; es ist

$$DAG = \varepsilon = A - (\gamma + \delta),$$

$$\text{und } 2\triangle ADG = g \,.\, AD \,.\, \text{Sin. } \varepsilon.$$

5) Man fange jetzt die weitere Berechnung bei dem letzten Dreiecke EFG an, und bestimme bei diesem sowohl den Flächeninhalt, als auch die Diagonallinie *EG* und den Winkel φ; es ist

$$2\triangle EFG = e \,.\, f \,.\, \text{Sin. } F,$$

$$\text{dann } EG^2 = e^2 + f^2 - 2ef \,.\, Cos.\ F,$$

$$\text{und } EG = \sqrt{(e^2 + f^2 - 2ef \,.\, \text{Cos. } F)},$$

$$\text{wie auch Sin. } \varphi = \frac{2\triangle\ EFG}{e \,.\, EG},$$

$$\text{oder Tang. } \varphi = \frac{f \,.\, Sin.\ F}{e - f \,.\, \text{Cos. } F}.$$

6) Durch den Polygonswinkel *E* und den Winkel φ kann man den Winkel μ, und mittels dieses letzteren, und der Seiten d und EG den Flächeninhalt des letzten Dreieckes finden; es ist

$$\mu = DEG = DEF - GEF = E - \varphi,$$

$$\text{und } 2\triangle\ DEG = d \,.\, EG \,.\, \text{Sin. } \mu.$$

7) Will man sich durch eine weitere Berechnung über die gefundenen Stücke in einiger Hinsicht eine Probe machen, so kann man die Diagonal *DG* sowohl im Dreiecke ADG aus den Stücken g, AD und ε, als auch im Dreiecke *DEG* aus den Stücken d, EG und μ bestimmen; es ist nach §. 9.

$$DG = \sqrt{(g^2 + AD^2 - 2g \,.\, AD \,.\, \text{Cos. } \varepsilon)},$$

$$\text{und } DG = \sqrt{(d^2 + EG^2 - 2d \,.\, EG \,.\, \text{Cos. } \mu)}.$$

8) Man bringe endlich die fünf gefundenen Dreiecksflächen in eine Summe, es ist

$$2 \text{ Polyg. ABCDEFG} = 2\triangle\ ABC + 2\triangle\ ACD + 2\triangle\ ADG + 2\triangle\ EFG + 2\triangle\ DEG,$$

somit ist der Flächeninhalt des ganzen Vieleckes, oder

Polyg. ABCDEFG = ½ (2△ ABC + 2△ ACD + 2△ ADG + 2△ *E*FG + 2△ DEG).

Anmerkung: Wollte man nach der im I. Theile dieses Lehrbuches in der IV. Tabelle vorkommenden Figur 57. aus allen bekannten Seiten und Winkeln nach dieser Methode den Flächeninhalt mittels der gezogenen Diagonallinien AC, AD, AE ꝛc. berechnen, so würde man die genannten unbekannten Stücke bei den Dreiecken ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AML, LKI, LIH, LHG und GAL bestimmen, und zur Probe den Flächeninhalt des letzten Dreieckes AGL sowohl aus den Seiten AG und GL und dem Winkel AGL, als auch aus den Seiten AL, LG und dem Winkel ALG, oder auch aus den Seiten AL, AG und dem Winkel GAL berechnen. Die letzteren dieser Stücke, nämlich AL, AG und GAL würden sich aus den Dreiecken ABC, ACD, ADE, AEF, AFG und AML ergeben, und die Stücke AL, LG und ALG könnten aus den Dreiecken AML, LKI, LIH und LHG gefunden werden.

§. 63.

Beispiel zur Aufgabe des vorigen §.

Man soll (Fig. 24.) den Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG berechnen, wenn alle Seiten und Winkel bekannt sind, und dieselben folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten:
a = 531,
b = 361,
c = 383,
d = 308,
e = 400,
f = 617,524,
g = 550,299;

Die bekannten Winkel:
A = 121° 13',
B = 113° 23',
C = 84° 44',
D = 270° 31',
E = 105° 55',
F = 91° 37',
G = 112° 37'.

Auflösung:

1) Man ziehe die Diagonalen AC, AD, DG und GE, es entstehen die Dreiecke ABC, ACD, ADG, DEG und EFG, derer Flächen zusammen den Flächeninhalt des Vieleckes geben.

2) Nach §. 62. Nro. 2. ist

$$2\triangle ABC = a \cdot b \cdot \text{Sin. } B,$$

dann $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos. } B,$

und $AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos. } B)}$,

wie auch $\text{Sin. } \alpha = \frac{2\triangle ABC}{b \cdot AC}$,

oder $\text{Tang. } \alpha = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{b - a \cdot \text{Cos. } B}$.

3) Nun ist der Winkel $B = 113° 23'$ also Sin. B $=$ Sin. $66° 37'$, und Cos. $B = -$ Cos. $66° 37'$; überdieß ist

Log. a $=$ Log. 531 $=$ 2,7250945,
dann Log. b $=$ Log. 361 $=$ 2,5575072,
und Log. $2\triangle$ ABC $=$ 9,9627812 — 10,

also Log. $2\triangle$ ABC $=$ 5,2453829
$=$ 175947,4, und $2\triangle$ ABC $=$ 175947,4.

4) Ferner ist $a^2 = 281961$,
dann $+ b^2 = 130321$,
und $- 2ab \cdot \text{Cos. } B = 152157$,

mithin $AC^2 = 564439$,
und AC $=$ 751,292.

Log. $(2\triangle \text{ ABC} \times r) =$ 15,2453829,
und Log. (b . AC) $=$ 5,4333157,

folglich Log. Sin. $\alpha =$ 9,8120672
$=$ Log. Sin. $40° 26' 46''$, und $\alpha = 40° 26' 46''$, wie auch ACD $= \beta =$ C $- \alpha = 44° 17' 14''$, weil der Winkel B stumpf, und deßhalb der Winkel α spitzig ist.

5) Im Dreiecke ACD ist nach §. 62. Nro. 3.

$2\triangle \text{ ACD} = c \cdot AC \cdot \text{Sin. } \beta$,

dann $AD^2 = c^2 + AC^2 - 2c \cdot AC \cdot \text{Cos. } \beta$,

und $AD = \sqrt{(c^2 + AC^2 - 2c \cdot AC \cdot \text{Cos. } \beta)}$,

wie auch $\text{Tang. } \delta = \frac{c \cdot \text{Sin. } \beta}{AC - c \cdot \text{Cos. } \beta}$.

6) Weil $\beta = 44° 17' 14''$, so ist Sin. β $=$ Sin. $44° 17' 14''$, und Cos. $\beta =$ Cos. $44° 17' 14''$; ferner ist

Log. c = Log. 383 = 2,5831988,
dann Log. AC = 2,8758085,
und Log. Sin. β = 9,8440144 — 10,

also Log. 2△ ACD = 5,3030217
= Log. 200919, und 2△ ACD = 200919;

dann c^2 = + 146689,
+ AC^2 = + 564439,
— 2c . AC Cos. β = — 411963,2

folglich AD^2 = + 299164,8,
und AD = 546,96;
überdieß ist

Log. c = 2,5831988,	Log. c = 2,5831988,
Log. Sin. B = 9,8440144 — 10,	Log. Cos. B = 9,8548211 — 10,
= 2,4272132;	= 2,4380199
	= Log. 274,17.

AC = + 751,292,
— c. Cos. β = — 274,17,
= + 477,122;

Log. (c . sin. β × r) = 12,4272132,
Log. 477,122 = 2,6786294,

also Log. Tang. δ = 9,7485838
= Log. Tang. 29° 16′ 16″, und δ = 29° 16′ 16″,
weil die Tangens dieses Winkels positiv ist.

7) Durch den gegebenen Winkel A, und die berechneten Winkel γ und δ ist der Winkel ε bestimmt; es ist

γ = 26° 10′ 14″,
+ δ = 29° 16′ 16″,

also $\gamma + \delta$ = 55° 26′ 30″,
dann A = 120° 72′ 60″,

also A — $(\gamma + \delta)$ = ε = 65° 46′ 30″.

8) Nach §. 62. Nro. 4. ist
2△ ADG = g . AD . Sin. ε; nun ist

Log. g = 2,7405987,
dann Log. AD = 2,7379552,
und Log. Sin. ε = 9,9599668 — 10,

also Log. 2△ ADG = 5,4385207
= Log. 274486,3, und 2△ ADG = 274486,3.

9) Da man auf diese Weise den Flächeninhalt der Dreiecke ABC, ACD und ADG gefunden hat, so berechne man von der anderen Seite aus noch die Dreiecke EFG und GDE; es ist nach §. 62. Nro. 5

$$2\triangle EFG = ef \sin. F,$$

dann $EG^2 = e^2 + f^2 . - 2ef\ Cos.\ F,$

und $EG = \sqrt{(e^2 + f^2 - 2ef . Cos. F)},$

wie auch $\sin. GEF = \sin. \varphi = \frac{2\triangle EFG}{e . EG},$

oder $Tang. \varphi = \frac{f . \sin. F}{e - f . Cos. F}.$

Nun ist
Log. e = Log. 400 = 2,6020600,
dann Log. f = L. 617,524 = 2,7906538,
und Log. Sin. F = 9,9998271 — 10,

also Log. 2△ EFG = 5,3925409
= Log. 246911, und 2△ EFG = 246911;

ferner ist e^2 = 160000,
$+ f^2$ = 381335,8,
$- 2ef . Cos. F$ = 13905,42,

also EG^2 = 555241,22
und EG = 745,145;
überdieß ist Log. (2△ EFG × r) = 15,3925409,
und Log. (e . EG) = 5,4743008,

also Log. Sin. φ = 9,9182401
= Log. Sin. 55° 56′ 6″, und φ = 55° 56′ 6″,
weßhalb μ = E — φ = 49° 58′ 54″, indem der Winkel F stumpf, und deßhalb der Winkel φ spitzig ist.

10) Aus der Seite d, dann aus der Diagonallinie EG, und aus dem Winkel μ berechne man

den

den Flächeninhalt des Dreieckes DEG; es ist nach §. 62. Nro. 6.

$$2\triangle DEG = d \cdot EG \cdot \text{Sin. } \mu.$$

Nun ist Log. $d = 2{,}4885507$,
dann Log. $EG = 2{,}8722408$,
und Log. Sin. $\mu = 9{,}8841373 - 10$,

also Log. $2\triangle DEG = 5{,}2449288$
$=$ Log. $175763{,}6$, und $2\triangle DEG = 175763{,}6$.

11) Man bringe die fünf gefundenen doppelten Dreiecksflächen in eine Summe, und dividire diese mit 2, um den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes zu erhalten; es ist

$$\begin{aligned} 2\triangle ABC &= 175947{,}4 \\ +\,2\triangle ACD &= 200919, \\ +\,2\triangle ADG &= 274486{,}3 \\ +\,2\triangle EFG &= 246911, \\ +\,2\triangle DEG &= 175763{,}6 \end{aligned}$$

also 2 Polyg. $= 1074027{,}3$,
und Polyg. $= 537013{,}65$.

Der Flächeninhalt dieses Siebeneckes ist demnach $= 537013{,}65$.

§. 64.

III. Aufgabe, man soll (Fig. 25.) von einer geradlinigten ebenen Figur ADEF ein Dreieck vom gegebenen Inhalte so abschneiden, daß dessen Spitze in A fällt, und die Grundlinie desselben die Seite AF unter dem gegebenen Winkel C schneidet.

Auflösung:

1) Nach der gesetzten Bedingung sind vom abzuschneidenden Dreiecke nebst dessen Flächeninhalte auch die beiden Winkel A und C bekannt, welche der Seite AC anliegen;

2) Nach dem 11. Zusatze des §. 52. ist die gesuchte Seite AC, oder

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \text{ Sin. } (A + C)}{\text{Sin. } A \text{ . Sin. } C}\right)};$$

3) Man trage von A aus auf der Linie AF die Linie $AC = b$ auf, und ziehe durch C unter dem gegebenen Winkel die Linie CB (I. §. 25.), man erhält dadurch das verlangte Dreieck ABC.

Zusatz: Ist bei der nämlichen Bedingung (Fig. 26.) der gegebene Winkel C ein rechter Winkel, so ist Sin. $C = r = 1$; und Cos. $C = o$, mithin (II. §. 66.)

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \text{ . Sin. } (A + 90^\circ)}{\text{Sin. } A}\right)};$$

nun ist Sin. $(A + 90^\circ) =$ Sin. A . Cos. $90^\circ +$ Cos. A . Sin. $90^\circ =$ Sin. $A \times o +$ Cos. $A \times 1 =$ Cos. A, (II. §. 83.), weßhalb

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \text{ . Cos. } A}{\text{Sin. } A}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(2\triangle \times \frac{\text{Cos. } A}{\text{Sin. } A}\right)}$$

$$= \sqrt{(2\triangle \times \text{Cot. A})} \text{ (II. §. 79.).}$$

§. 65.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Man soll (*Fig.* 25.) vom Vierecke $ADEF$, dessen Winkel $A = 80^\circ\ 34'\ 20''$, ein Dreieck von 10108,54 Quadratfuß so abschneiden, daß es seine Spitze in A hat, und dessen Grundlinie die Seite AF des Vierecks unter dem Winkel $C = 64^\circ\ 58'\ 30''$ schneidet.

Auflösung:

1) Vom Dreiecke, das man unter diesen Bedingungen abschneiden soll, sind nebst dem Flächeninhalte die beiden Winkel A und C bekannt, welche der gesuchten Seite b anliegen;

2) Nach dem II. Zusatze des §. 52. ist

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \text{ Sin. } (A + C)}{\text{Sin. A . Sin. C}}\right)};$$

3) Die Winkel A + C sind = 145° 32′ 50″, mithin ist Sin. (A + C) = Sin. 34° 27′ 10″ (II. §. 65.); ferner ist

Log. 2 = 0,3010300,
Log. △ = 4,0046884,
Log. Sin. (A + C) = 9,7526068 — 10,

Log. (2△ Sin. (A + C)) = 4,0583252,
Log. (Sin. A . Sin. C) = 0,9512715 — 1,

also Log. b^2 = 4,1070537,
und Log. b = 2,0535268, daher b = 113,117.

4) Man nehme nun von *A* aus auf der Vierecksseite A*F* die Linie AC = b = 113,117 Fuß, und ziehe durch C unter dem gegebenen Winkel *C* = 64° 58′ 30″ die Linie C*B*, so ist die Figur A*C*B das verlangte abgeschnittene Dreieck ACB.

II. Beispiel:

Man soll (*Fig.* 26.) von der geradlinigten ebenen Figur ADEF ein rechtwinklichtes Dreieck, dessen Flächeninhalt 7800 Quadratschuh hält, so abschneiden, daß die Spitze in A fällt, und die Grundlinie desselben die Seite AF unter dem rechten Winkel C schneidet, während der Winkel A = 42° 30′ 50″ ist.

Auflösung:

1) In diesem Dreiecke sind nebst dem Flächeninhalte auch die Winkel A und C bekannt, und man berechne aus diesen Stücken die Seite AC, welcher diese zwei Winkel anliegen;

2) Nach dem Zusatze des §. 64. ist die gesuchte Dreiecksseite AC, oder

$$b = \sqrt{(2\triangle \times \text{Cot. } A)};$$

3) Nun ist Log. 2 = 0,3010300,
Log. △ = 3,8920946,
Log. Cot. A = 10,0377360 — 10,

also Log. b^2 = 4,2308606
und Log. b = 2,1154303, weßhalb b = 130,446.

4) Man schneide vom Punkte A aus auf der Seite AF die Linie AC = b ab, welche 140,446 Fuß hält, und errichte am Punkte C das Perpendikel CB, bis es die Seite AD im Punkte B schneidet (I. §. 32., und II. §. 145.), man erhält dadurch das verlangte Dreieck ABC.

Anmerkung: Da man gewöhnlich die drei Ecke eines Dreieckes mit den Buchstaben A, B und C bezeichnet, so ist es bei den hier vorkommenden Aufgaben bequem, wenn man diese Buchstaben wegen der darnach aufgestellten Lehrsätze beibehält.

§. 66.

IV. Aufgabe, man soll (Fig. 25.) von einer geradlinigten ebenen Figur ADEF ein Dreieck vom gegebenen Inhalte so abschneiden, daß es seine Spitze in A hat, und dessen Grundlinie die Seite AF in einem gegebenen Punkte C durchschneidet.

I. Auflösung:

1) Unter diesen Bedingungen ist vom abzuschneidenden Dreiecke ABC dessen Flächeninhalt, dann der Winkel A, und die anliegende Seite AC = b bekannt, und man sucht die Größe des Winkels ACB oder C, unter welchem die Dreiecksgrundlinie BC die Viereckseite AF schneidet;

2) Nach §. 52. Zusatz III. ist

$$\text{Cot. C} = \frac{b^2}{2\triangle} - \text{Cot. A};$$

3) Man ziehe durch den Punkt C unter diesem gefundenen Winkel die gerade Linie CB, so schneidet diese das verlangte Dreieck ABC ab.

II. Auflösung:

1) Weil vom abzuschneidenden Dreiecke ABC nebst dem Flächeninhalte, welcher durch △ bezeichnet wird, auch die Seite AC = b bekannt ist, so läßt sich daraus die andere, dem Winkel A anliegende Seite AB = c berechnen; es ist nach dem II. Zusatze des §. 50. die Linie AB oder

$$c = \frac{2\triangle}{b \,.\, Sin.\, A};$$

2) Man nehme nun von A aus auf der Seite *A*D des Vierecks die Linie *A*B = c, ziehe vom gegebenen Punkte *C* nach B die gerade Linie CB, und man erhält das verlangte Dreieck AB*C*.

I. Zusatz: Soll man (Fig. 25.) von einer gegebenen geradlinigten Figur AD*EF* ein Dreieck G*E*H vom gegebenen Inhalte so abschneiden, daß es seine Spitze in einem gegebenen Punkte H innerhalb der Figur hat, und auf der Seite DE steht, so ist in dem wegzuschneidenden Dreiecke nebst dem Flächeninhalte die Seite *E*H = g, und der anliegende Winkel G*E*H oder *E* gegeben, und man kann entweder nach der vorstehenden I. Auflösung verfahren, und den Winkel GHE = H suchen, oder die Seite GE = h bestimmen, und den berechneten Winkel H, oder die gefundene Seite G*E* auftragen, um das verlangte Dreieck GEH zu erhalten; es ist

$$Cot.\, H = \frac{g^2}{2\triangle} - Cot.\, E,$$

$$\text{und } h = \frac{2\triangle}{g \,.\, Sin.\, E}.$$

II. Zusatz: Wenn man (Fig. 25.) ein Dreieck ADC vom gegebenen Inhalte so abschneiden soll, daß es die Seite AD = c zur Grundlinie hat, und seine Spitze in die Seit AF fällt, so weiß man bei diesem Dreiecke nebst dem Flächeninhalte die Grundlinie c und den anliegenden Winkel A, und daraus läßt sich die andere Seite AC oder d berechnen, welche mit

der Grundlinie c den bekannten Winkel A einschließt; es ist AC, oder

$$d = \frac{2\triangle}{c \,.\, \text{Sin. A}}.$$

Trägt man nun von A aus auf der Seite AF die gefundene Linie AC oder d auf, so erhält man das verlangte Dreieck ACD.

§. 67.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Man soll (Fig. 25.) von dem Vierecke ADEF, dessen Winkel BAC oder A = 80° 34′ 20″, ein Dreieck abschneiden, dessen Flächeninhalt 10108,54 Quadratfuß hält, und welches seine Spitze in A hat, während dessen Grundlinie die Viereckseite AF im gegebenen Punkte C so schneidet, daß die Linie AC oder b = 113,117.

I. Auflösung:

1) Weil in diesem Dreiecke nach der gesetzten Bedingung nebst dem Flächeninhalte, und dem Winkel A die Seite AC oder b bekannt ist, so ist nach der 1. Auflösung des vorigen §.

$$\text{Cot. C.} = \frac{b^2}{2\triangle} - \text{Cot. A};$$

2) Nun ist

Log. b = Log. 113,117 = 2,0535278,
mithin Log. b × 2 = Log. b^2 = 4,1070556,
und Log. 2△ = Log.(2 × 10108,54) = 4,3057184,

folglich Log. $(b^2 : 2\triangle)$ = 0,8013372 — 1

$$= \text{Log. } 0{,}632903, \text{ und } \frac{b^2}{2\triangle} = 0{,}632903;$$

ferner ist (§. 53. Beisp. III. und Anmerk. 1. und 2.)
Log. Cot. A = 9,2202314 = Log. 1660470000,
und Cot. A : r = Cot. A : 10^{10} = 0,1660471,
weßhalb Cot. C = (0,632903 — 0,1660471) × r
= 0,4668559 × r = 4668559000;

und Log. Cot. C = Log. 4668559000
= 9,6661829 = Log. Cot. 64° 58′ 29″,
wie auch C = 64° 58′ 29″.

3) Unter diesem Winkel ziehe man vom gegebenen Punkte C aus die Linie BC, und man erhält das Dreieck ABC, welches unter der gesetzten Bedingung vom Vierecke ADEF weggeschnitten wird.

II. Auflösung:

1) Nach der II. Auflösung des vorigen §. ist wegen der durch die Bedingung gegebenen Stücke die Seite AB, oder

$$c = \frac{2\Delta}{b \,.\, \text{Sin. A}};$$

2) Nun ist

Log. 2Δ = Log. (2 × 10108,54) = 4,3057184,
und Log. (b . Sin. A) = 2,0476218,

also Log. c = 2,2580966
= Log. 181,174, und c = 181,174.

3) Man trage aus A auf der Viereckseite AD die gefundene Linie c = AB = 181,174 auf, es wird dadurch in der Seite AD der Punkt B bestimmt, und man erhält das verlangte Dreieck ABC.

II. Beispiel:

Man soll (Fig. 25.) vom Vierecke ADEF das Dreieck GEH, welches 6300 Quadratfuß hält, so abschneiden, daß es seine Spitze innerhalb des Viereckes in dem Punkte H hat, und daß die Entfernung HE = 110 Fuß, der Winkel GEH oder E aber = 54° 30′ ist.

I. Auflösung:

1) Nach dem I. Zusatze des §. 66. ist

$$\text{Cot. H} = \frac{g^2}{2\Delta} - \text{Cot. } E;$$

2) Nun ist

$$\frac{g^2}{2\triangle} = 0{,}9603174,$$

$$\text{und } \frac{\text{Cot. } E}{r} = 0{,}7132932,$$

$$\text{also } \frac{g^2}{2\triangle} - \text{Cot. E} = 0{,}2470242,$$

und Log. Cot. H = Log. (0,2470242 × r)
= Log. 2470242000 = 9,3927394
= Log. *Cot.* 76° 7′ 28″, weßhalb der Winkel H = 76° 7′ 28″.

3) Man ziehe vom Punkte H unter dem Winkel GHE = H = 76° 7′ 28″ die Linie HG zur Viereckseite DE, und man erhält das verlangte Dreieck GHE.

II. Auflösung:

1) Weil nach der gesetzten Bedingung in diesem Dreiecke nebst dem Flächeninhalte desselben auch die Seite HE oder G, und der Winkel GEH oder E bekannt ist, so ist nach dem 1. Zusatze des §. 66.

$$GE = h = \frac{2\triangle}{g \,.\, \textit{Sin.}\ E};$$

2) Nun ist

$$\text{Log. } 2\triangle = 4{,}1003705,$$

$$\text{und Log. } (g \,.\, \textit{Sin.}\ E) = 1{,}9520787,$$

---

also Log. h = 2,0482918
= Log. 111,7614, und h = 111,7614.

3) Man trage auf der Viereckseite ÆD vom Punkte E aus die Linie h = 111,7614 auf, ziehe von H nach G die gerade Linie HG, und man erhält das verlangte Dreieck GHÆ.

III. Beispiel:

Man soll (Fig. 25.) vom Vierecke ADEF das Dreieck ADC, welches 5884 Quadratfuß hält, so abschneiden, daß die Linie AD = c = 140 Fuß dessen Grundlinie wird, und die Spitze dieses Dreieckes in die Viereckseite AF fällt, während der Winkel BAF oder A = 80° 34′ ist.

Auflösung:

1) Nach dieser Bedingung ist der Flächeninhalt des abzuschneidenden Dreieckes oder $\triangle = 5884$ □ Fuß, dann $AD = c = 140$, und $A = 80° 34'$, weßhalb nach dem 11. Zusatze des §. 66. die gesuchte Seite AC, oder

$$d = \frac{2\triangle}{c \,.\, \text{Sin. A}};$$

2) Nun ist

$$\text{Log. } 2\triangle = 4{,}0707027,$$
$$\text{und Log. } (c \,.\, \text{Sin. A}) = 2{,}1402150,$$
$$\text{also Log. } d = 1{,}9304877,$$

und $d = 85{,}209$;

3) Man trage die gefundene Linie $d = 85{,}209$ vom Punkte A aus auf der Viereckseite AF auf, es wird dadurch der Punkt C bestimmt;

4) Man ziehe vom Punkte C die gerade Linie CD, und man erhält das verlangte Dreieck ACD.

II. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Viereckes zu seinen Seiten und Winkeln.

§. 68.

Bezeichnung der vorkommenden Stücke.

a) In diesem, und in dem folgenden Abschnitte dieses Hauptstückes bezeichnen wieder bei Vierecken und bei Vielecken die großen Buchstaben A, B, C ꝛc. die Winkel, und die kleinen Buchstaben a, b, c ꝛc. der Ordnung nach die anliegenden Seiten.

b) Die abgekürzten Ausdrücke Tetrag., Trap., Parallel. oder Parall. und Polyg. zeigen den Flächeninhalt eines gegebenen Viereckes, Trapezes, Parallelogrammes und Vieleckes an.

c) Der Radius des Kreises r wird in diesem, und und im folgenden Abschnitte ebenfalls wieder durch 1 ausgedrückt.

§. 69.

I. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 27.) im Vierecke ABCD die gegebenen Diagonallinien AC und BD den bekannten Winkel AEB oder E einschließen, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

Tetrag. $= \frac{1}{2}$ BD . AC . Sin. E.

I. Beweis:

1) Man ziehe in diesem Vierecke von lauter hohlen Winkeln nebst den gegebenen zwei Diagonalen AC und BD von den Ecken A und C auf die Diagonal BD die Perpendikel AF und CG, und bezeichne das Stück AE der anderen Diagonallinie mit x, es ist dann CE $=$ AC $-$ AE $=$ AC $-$ x.

2) Weil F im Dreiecke AEF ein rechter Winkel ist, so verhält sich (II. §. 104.)

AE : AF $=$ 1 : Sin. AEB,
und x : AF $=$ 1 : Sin. E,
weßhalb AF $=$ x . Sin. E.

3) Eben so verhält sich im Dreiecke GEC wegen des rechten Winkels bei G, da der Winkel AEF $=$ GEC (I. §. 10. Zus. III.),

CE : CG $=$ 1 : $Sin.$ CEG,
oder AC $-$ x : CG $=$ 1 : Sin. E,
daher CG $=$ Sin. E (AC $-$ x) $=$ AC . Sin. E $-$ x . Sin. E.

3) Der Flächeninhalt des Viereckes ist den beiden Dreiecken BAD und BCD gleich; nun ist nach Nro. 2. und 3. das Dreieck BAD $=$ $\frac{1}{2}$BD . AF $=$ $\frac{1}{2}$BD $\times$ x . Sin. E, und das Dreieck BCD $=$ $\frac{1}{2}$BD (AC . Sin. E $-$ x . Sin. E) $=$ $\frac{1}{2}$BD . AC . Sin. E $-$ $\frac{1}{2}$BD . x . Sin. E, folglich ist das Viereck, oder Tetrag. $=$ $\triangle$ BAD $+$ $\triangle$ BCD $=$ $\frac{1}{2}$BD . x . Sin. E $+$ $\frac{1}{2}$BD . AC . Sin. E $-$ $\frac{1}{2}$BD . x . Sin. E $=$ $\frac{1}{2}$BD . AC . Sin. E.

II. Beweis:

4) Wenn (Fig. 28.) das Viereck ABCD bei A einen erhabenen Winkel hat, so ziehe man nebst den Diagonalen CA und BD von den Ecken C und A auf die Diagonallinie BD die Perpendikel CG und AF, es ist aus den angeführten Gründen, wenn man $AE = x$, also $CE = CA + x$ setzt, $CG = \text{Sin. } E\ (CA + x) = CA \text{ . Sin. } E + x \text{ . Sin. } E$, und $AF = x \text{ . Sin. } E$, weßhalb

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}BD \text{ . } CG = \tfrac{1}{2}BD \text{ . } AC \text{ . Sin. } E + \tfrac{1}{2}BD \text{ . } x \text{ . Sin. } E,$$

und $\triangle BAD = \tfrac{1}{2}BD \text{ . } AF = \tfrac{1}{2}BD \text{ . } x \text{ . Sin. } E$, daher ist wieder, da das Viereck $ABCD = \triangle BCD - \triangle BAD$,

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2}BD \text{ . } AC \text{ . Sin. } E.$$

I. Zusatz: Wenn man einen Winkel weiß, den die Diagonallinien mit einander bilden, so sind die übrigen ebenfalls bekannt. Hat (Fig. 27.) das Viereck lauter hohle Winkel, und es ist der Winkel AEB $= E$ bekannt, so ist $AED = 2R - E = BEC$, gleichwie $AEB = CED$, und beim Vierecke mit einem erhabenen Winkel (Fig. 28.) ist ebenfalls, wenn der Winkel AEB oder E gegeben ist, der Winkel $AED = 2R - E$ (I. §. 8. und 10.).

II. Zusatz: Durch die beiden Diagonallinien, nebst dem Winkel, den sie einschließen, ist der Flächeninhalt eines Viereckes gegeben; weil dadurch bei den beiden Dreiecken, aus welchen sich der Flächeninhalt des Viereckes ergibt, nebst einer Diagonal als gemeinschaftlicher Grundlinie jedesmal auch die Höhe bestimmt ist.

III. Zusatz: Wenn in einem Vierecke aus den vier Stücken, nämlich aus dem Flächeninhalte, dann aus den beiden Diagonalen, und aus dem Winkel, unter welchem sich diese letzteren schneiden, drei Stücke bekannt sind, so läßt sich allemal das vierte finden.

Nach dem Lehrsatze dieses §. ist (Fig. 27 und 28.)

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2}BD \text{ . } AC \text{ . Sin. } E,$$

$$\text{mithin } BD = \frac{2\,\text{Tetrag.}}{AC \,.\, \text{Sin. } E},$$

$$\text{dann } AC = \frac{2\,\text{Tetrag.}}{BD \,.\, \text{Sin. } E},$$

$$\text{und Sin. } E = \frac{2\,\text{Tetrag.}}{BD \,.\, AC}.$$

§. 70.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Wenn (Fig. 27.) im Vierecke AC die Diagonal AC = 240, dann die Diagonal $BD = 315$, somit $\frac{1}{2}$ BD = 157,5, und der Winkel AEB oder E = 70° 40′, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Vierecks?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des §. 69. ist

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2} BD \,.\, AC \,.\, \text{Sin. } E;$$

2) Nun ist

Log. $\frac{1}{2}$ BD = 2,1972806,
dann Log. AC = 2,3802112,
und Log. Sin. E = 9,9747918 — 10,

also Log. Tetrag. = 4,5522836
= Log. 35668,4, und Tetrag. = 35668,4.

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist daher = 35668,4.

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 27.) der Flächeninhalt des Viereckes AC = 35668,4, dann die Diagonallinie AC = 240, und der Winkel AEB = E = 70° 40′, wie groß ist die andere Diagonallinie BD?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 69. ist

$$BD = \frac{2 \text{ Tetrag.}}{AC \,.\, \text{Sin. } E};$$

2) Nun ist

Log. 2 Tetrag. = 4,8533136,
und Log. (AC × Sin. E) = 2,3550030,

also Log. BD = 2,4983106
= Log. 315, und BD = 315.

Die andere Diagonallinie BD ist demnach = 315.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 27.) der Flächeninhalt eines Viereckes = 35668,4, dann die eine Diagonallinie AC = 240, und die andere BD = 315, wie groß ist der von diesen Linien eingeschlossene Winkel AEB oder E?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des §. 69. ist

$$\text{Sin. } E = \frac{2 \text{ Tetrag.}}{BD \,.\, AC};$$

2) Nun ist

Log. (2 Tetrag. × r) = 14,8533136,
und Log. (BD × AC) = 4,8785218,

also Log. Sin. E = 9,9747918
= Log. 70° 40′, und E = 70° 40′.

Der Winkel E, welchen die zwei Diagonallinien bilden, ist daher = 70° 40′.

§. 71.

II. Lehrsatz:

Wenn man (Fig. 27.) im Vierecke AC den bekannten Winkel mit A, dann die beiden darauf folgenden Seiten mit a und b, und die beiden Winkel, welche die Diagonallinie BD mit diesen zwei

Seiten bildet, mit α und β bezeichnet, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{2\,\text{Sin.}(A + \beta)} \times (b \,.\, \text{Sin.}\,\alpha + a \,.\, \text{Sin.}\,\beta).$$

Beweis:

1) Man ziehe vom Punkte B die Diagonallinie BD, und auf diese von den Ecken A und C die Perpendikel AF und CG, und setze den Winkel ABD $= \beta$, dann $DBC = \alpha$, und ADB $= \gamma$.

2) Im Dreiecke BAD verhält sich (II. §. 112.)

$$AB : BD = \text{Sin.}\,\gamma : \text{Sin. A},$$

oder $a : BD = \text{Sin.}\,\gamma : \text{Sin. A}$,

weßhalb, da $\text{Sin.}\,\gamma = \text{Sin.}\,(A + \beta)$ (§. 22. a.),

$$BD = \frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{\text{Sin.}\,\gamma} = \frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{\text{Sin.}\,(A + \beta)}.$$

3) Weil der Radius oder $r = 1$, so ist (II. §. 104.)

$AF = a \,.\, \text{Sin.}\,\beta$, und $CG = b \,.\, \text{Sin.}\,\alpha$.

4) Nun ist $\triangle$ BAD $= \frac{1}{2} BD \,.\, AF$, und $\triangle$ BC$D = \frac{1}{2} BD \,.\, CG$, folglich

$$\text{Tetrag.} = \triangle \text{BAD} + \triangle \text{BCD} = \tfrac{1}{2}\text{BD}\,(AF + \text{CG})$$

$$= \frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{2\,\text{Sin.}\,(A + \beta)} \times (a \,.\, \text{Sin.}\,\beta + b \,.\, \text{Sin.}\,\alpha).$$

Zusatz: Wenn in einem Vierecke nebst einem Winkel die beiden darauf folgenden Seiten, und die beiden Winkel bekannt sind, welche die Diagonallinie mit diesen zwei Seiten bildet, so ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

Anmerkung: Bei der durch den Lehrsatz dieses §. angegebenen Formel lassen sich zur Bestimmung der Stücke a, b, A, α und β für die Anwendung keine bequemen Formeln aufstellen.

§. 72.

Beispiel zum vorigen §.

Wenn (Fig. 27.) im Vierecke AC der Winkel BAD oder A = 134° 15′, dann die Seite $\mathcal{A}$B oder a = 170, ferner die Seite B*C* oder b = 260, und von den Winkeln α und β, welche die Diagonallinie B*D* mit diesen zwei Seiten bildet, der erstere = 32° 20′, und der letztere = 24° 30′, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Nach §. 71. ist unter der gesetzten Bedingung der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \frac{a \,.\, \text{Sin. A}}{2 \,.\, \text{Sin.}(A + \beta)} \times (b \,.\, \text{Sin.}\, \alpha + a \,.\, \text{Sin.}\, \beta;$$

2) Der Winkel A ist = 134° 15′,
und A + β = 158° 45′, weßhalb
Sin. A = Sin. 45° 45′, und Sin. (A + β) = Sin. 21° 15′;

3) Nun ist

L. a. = L. 270 = 2,2304489,	Log. 2 = 0,3010300,
Log. Sin. A = 9,8550961 — 10,	L. Cos. (A + β) = 9,5592338 — 10,
= 2,0855450,	= 0,8602638 — 1.

Log. (a . Sin. A) = 2,0855450,
Log. (2 . Sin. (A + β)) = 0,8602638 — 1,
= 2,2252812.

L. b = L. 260 = 2,4149733,	L. a = L. 170 = 2,2304489,
Log. Sin. α = 9,7282271 — 10,	Log. Sin. β = 9,6177270 — 10,
= 2,1432004,	= 1,8481759,
= L. 139,059, also + 139,059;	= Log. 70,498, also + 70,498.

b . Sin. α = 139,059,
a . Sin. β = 70,498,

also b . Sin. α + a . Sin. β = 209,557;

$$Log.\left(\frac{a\,.\,Sin.\,A}{2\,.\,Sin.\,(A+\beta)}\right) = 2{,}2252812$$

$$Log.\ 209{,}557 = 2{,}3213022$$

---

also Log. Tetrag. = 4,5465834

= Log. 35203,3, und Tetrag. = 35203,3.

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist demnach = 35203,3.

§. 73.

III. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 29.) im Vierecke ABCD die zwei gegebenen, auf einander folgenden Seiten AB und BC mit a und b, und die bekannten, den anderen zwei Seiten anliegenden Winkel mit A, C und D ausgedrückt werden, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

$$Tetrag. = \frac{b\,.\,Sin.\,C}{Sin.\,D}\left(\frac{b\,.\,Sin.\,(C+D)}{2} + a\,.\,Sin.\,A\right) + \frac{a^2\ Sin.\,A\,.\,Sin.\,(A+D)}{2\ Sin.\,D}.$$

Beweis:

1) Man ziehe vom Punkte B die Linie BE mit AD, und vom Punkte E die Linie EF mit BA parallel (I. §. 39.), und errichte von C und E auf AD die Perpendikel CG und EM (I. §. 33), während man den Durchschnittspunkt der beiden Linien BE und CG mit H bezeichnet, und der Kürze wegen EF = AB = a (I. §. 41. Zus. IV.), dann den Winkel $CBE = \alpha$, ferner $CEB = \beta$, und $FED = \gamma$ setzt.

2) Im Dreiecke BCE verhält sich (II. §. 12.)

BC : BE = Sin. β : Sin. BCE, mithin (I. §. 41 u. II. §. 82. a.)

b : BE = Sin. D : Sin. C,

$$\text{und } BE = \frac{b\ Sin.\ C}{Sin.\ D}.$$

3)

3) Im Dreiecke BCE ist Sin. α = Sin. (C + β) (§. 22. a.) = Sin. (C + D), da β = D, und deßhalb C + β = (C + D), und es verhält sich im Dreiecke BCH (II. §. 104.)

$$BC : CH = 1 : \text{Sin. } \alpha,$$

oder $$b : CH = 1 : \text{Sin. } (C + D),$$

folglich $$CH = b \text{ . Sin } (C + D).$$

4) Der Flächeninhalt des Dreieckes BCE, oder

$$\triangle BCE \text{ ist} = \tfrac{1}{2} BE \text{ . } CH = \frac{b \text{ . Sin. } C}{\text{Sin. } D} \times \frac{b \text{ . } Sin \text{ } (C + D)}{2}.$$

5) Der Winkel A ist = EFD = F, und EF = AB = a, und es verhält sich im Dreiecke EFM, da Sin. EFM = Sin. EFD = Sin. A (II. §. 65.)

$$EF : EM = 1 : \text{Sin EFM},$$

oder $$a : EM = 1 : \text{Sin A},$$

weßhalb $$EM = a \text{ . Sin. A.}$$

6) Im Dreiecke EFD ist Sin. γ = Sin. (EFD + D) = Sin. (A + D), und es verhält sich

$$EF : FD = \text{Sin. D} : Sin. \gamma,$$

oder $$a : FD = \text{Sin. } D : \text{Sin. } (A + D),$$

deßhalb ist $$FD = \frac{a \text{ . } Sin. \text{ } (A + D)}{\text{Sin. D}}.$$

7) Der Flächeninhalt des Parallelogrammes ABEF ist nach Nro. 2 und 5. = AF . EM = BE . EM $= \frac{b \text{ . Sin C}}{\text{Sin. } D} \times a$. Sin. A (I. §. 155.), und der Flächeninhalt des Dreieckes EFD, oder $\triangle$ EFD ist

$$= \tfrac{1}{2} FD \text{ . EM} = \frac{a \text{ . Sin. } (A + D)}{2 \text{ . } Sin. \text{ D}} \times a \text{ . Sin. A}$$

$$= \frac{a^2 \text{ . } Sin. \text{ A . Sin. } (A + D)}{2 \text{ . Sin. D}} \text{ (Nro. 5 und 6.).}$$

8) Nun besteht aber der Flächeninhalt des Viereckes AC aus dem Parallelogramme AE, und aus den Dreiecken BCE und EFD, daher ist nach Nro. 4. und nach Nro. 7. der Flächeninhalt des ganzen Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \triangle \text{BCE} + \text{Parall. AE} + \triangle \text{EFD}$$

$$= \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } D}\left(\frac{b \,.\, \text{Sin. } (C + D)}{2} + a \,.\, \text{Sin. A}\right)$$

$$+ \frac{a^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } (A + D)}{2 \,.\, \text{Sin. D}}$$

, indem man durch die Auflösung der Produkte in ihre Faktoren den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } D}$ nur einmal setzt (Arithm. III. §. 87. Nro. IV.).

I. Zusatz: Durch zwei auf einander folgende Seiten, und durch die drei Winkel, welche den anderen zwei Seiten anliegen, somit (Fig. 29.) durch die zwei Seiten a und b, und durch die drei Winkel A, C und D ist der Flächeninhalt eines Viereckes gegeben; indem man nach dem vorstehenden Lehrsatze aus diesen fünf gegebenen Stücken eines Viereckes zu dessen Flächenbestimmung eine Gleichung aufstellen kann, wo nur die zwei bekannten Seiten a und b, und die drei bekannten Winkel A, C und D vorkommen.

II. Zusatz: Aus dem Flächeninhalte eines Viereckes (Fig. 29.), dann aus den drei Winkeln A, C und D, und aus einer der zwei Seiten a und b läßt sich die andere berechnen.

Will man aus den gegebenen Stücken die Seite a bestimmen, so multiplizire man bei der vorstehenden, durch den Lehrsatz dieses §. dargestellten Formel wirklich (Arithm. III. §. 53. Lehrs. II.), man hebe dann die Brüche auf (Arithm. III. §. 98.), und suche in der gemischten quadratischen Gleichung die Größe a, somit die unbekannte Seite (Arithm. IV. §. 21.); es ist nach dem Lehrsatze

$$\text{Tetrag.} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. D}}\left(\frac{b \,.\, \text{Sin. } (C + D)}{2} + a \,.\, \text{Sin. A}\right)$$

$$+ \frac{a^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } (A + D)}{2 \,.\, \text{Sin. D}}$$

, dann

$$\text{Tetrag.} = \frac{b^2 . \text{Sin. } C . \text{Sin.}(C+D)}{2 . \text{Sin. } D} + \frac{ab . \text{Sin. } A . \text{Sin. } C}{\text{Sin. } D}$$

$$+ \frac{a^2 \text{ Sin. } A . \text{ Sin. } (A + D)}{2 . \text{Sin. } D}, \text{ ferner}$$

$$2 \text{ Tetrag. Sin. } D = b^2 . \text{ Sin. } C . \text{ Sin. } (C + D)$$

$+ 2ab . \text{Sin. } A . \text{Sin. } C + a^2 . \text{Sin. } A . \text{Sin. } (A+D)$, und $a^2 . \text{Sin. } A . \text{Sin. } (A + D) + 2b . \text{Sin. } A . \text{Sin. } C . a$ $= 2 \text{ Tetrag. Sin. } D - b^2 . \text{Sin } C . \text{Sin. } (C+D)$, weßhalb

$$a^2 + \frac{2b . \text{ Sin. } C}{(\text{Sin. } A + D)} a$$

$$= \frac{2 \text{ Tetrag Sin } D - b^2 . \text{ Sin. } C . \text{ Sin. } (C + D)}{\text{Sin. } A . \text{ Sin. } (A + D)},$$

$$\text{und } a = - \frac{b . \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 \text{ Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} \right.}$$

$$\left. + \frac{2 \text{ Tetrag. Sin. } D - b^2 . \text{ Sin. } C . \text{ Sin. } (C + D)}{\text{Sin. } A . \text{ Sin. } (A + D)} \right).$$

III. Zusatz: Wenn (Fig. 30.) die Linie BC mit AD parallel, und daher das Viereck ein Trapez ist, so ist $C + D = 180°$ (I. §. 41.), und Sin. $(C + D)$ $= 0$, wie auch Sin. $C =$ Sin. D (II. §. 65., und §. 66. b.), weßhalb

$$\text{Trap.} = ab . \text{ Sin. } A + \frac{a^2 . \text{ Sin. } A . \text{ Sin. } (A + D)}{2 \text{ Sin. } D},$$

$$\text{und } a = - \frac{b . \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 . \text{ Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} \right.}$$

$$\left. + \frac{2 \text{ Trap. Sin. } C}{\text{Sin. } A . \text{ Sin. } (A + D)} \right).$$

IV. Zusatz: Wenn (Fig. 31.) das Viereck ein Parallelogram, und deßhalb auch AB mit CD parallel ist, so ist Sin. $(A + D) =$ Sin. $180° = 0$, und Parallel. $= ab . \text{ Sin. } A$, wie auch $a = \frac{\text{Parallel.}}{b . \text{ Sin. } A}$.

V. Zusatz: Die letzte Formel (Fig. 31.) für die

Bestimmung des Flächeninhaltes eines Parallelogrammes erhält man auch, im Falle nur die zwei Seiten a und b mit dem Winkel A gegeben sind, wenn man BA als Grundlinie annimmt, und dadurch das Perpendikel Cm die Höhe wird; es verhält sich, da $B + A = 180°$, und Sin. B = Sin. A,

BC : Cm = r : Sin. B (II. §. 104.);
oder b : Cm = 1 : Sin. A,
weßhalb Cm = b . Sin. A;
nun ist Parallel. = $BA \times$ Cm (I. §. 155.),
folglich ist Parallel. = ab . Sin. A,

$$\text{und } a = \frac{\text{Parallel.}}{b \text{ . Sin. } A}.$$

VI. Zusatz: Wenn (*Fig.* 31.) im Parallelogramme AC nebst den Seiten AB und AD oder a und d auch der eingeschlossene Winkel A bekannt ist, so ist

Parallel. = AD $\times$ Bn, nun ist
Bn = a . Sin. A, folglich ist
Parallel. = ad . Sin. A, und

$$a = \frac{\text{Parallel.}}{d \text{ . Sin. } A}, \text{ wie auch } d = \frac{\text{Parallel.}}{a \text{ . Sin. } A}.$$

§. 74.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 29.) im Vierecke AC die Seite AB oder a = 140, und die Seite BC oder b = 155, und überdieß sei der Winkel A = 114° 30′, dann C = 96° 30′, und D = 53° 50′, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Weil in diesem Vierecke nebst den Seiten a und b die drei Winkel A, C und D bekannt sind, welche den übrigen zwei Seiten c und d anliegen, so ist nach dem Lehrsatze des §. 73. der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. D}} \left(\frac{b \,.\, \text{Sin. (C + D)}}{2} + a \,.\, \text{Sin. A} \right)$$

$$+ \frac{a^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A + D)}}{2 \text{ Sin. } D}.$$

2) Nun ist A = 114° 30′, dann $C = 96° 30'$, und $D = 53° 50'$, weßhalb Sin. A = Sin. 65° 30′, dann $\text{Sin. } C = \text{Sin. } 83° 30'$, und $\text{Sin. } D = \text{Sin. } 53° 50'$; ferner ist $C + D = 150° 20'$, und $A + D = 168° 20'$, folglich Sin. (C + D) = Sin. 29° 40′, und Sin. (A + D) = Sin. 11° 40′.

3) Uiberdieß ist

Log. b = 2,1903317,	b = 155, $\frac{1}{2}$b = 77,5,
Log. Sin. C = 9,9971993—10,	Log. $\frac{1}{2}$b = 1,8893017,
= 2,1875310,	L. Sin.(C+D) = 9,6945642—10,
Log. Sin. D = 9,9971993—10	= 1,5838659
= 2,2804940;	= Log. 38,3588;
Log. a = 2,1461280,	+ 38,3588,
Log. Sin. A = 9,9590229—10,	+ 127,394,
= 2,1051509	= 165,7528, und
= Log. 127,394;	Log. 165,7528 = 2,2194408;

2,2804940,
+ 2,2194408,
= 4,4999348
= 31618,03; ferner ist

Log. a × 2 = Log. a^2 = 4,2922560,
dann Log. Sin. A = 9,9590229 — 10,
und Log. Sin. (A + D) = 9,3058189 — 10,

also Log. (a^2. Sin. A . Sin. (A + D)) = 3,5570978,
dann Log. (2 . Sin. D) = 0,2080670,

= 3,3490308
= Log. 2233,73; weßhalb
Tetrag. = 31618,03 + 2233,73 = 33851,76.

Es ist demnach der Flächeninhalt dieses Viereckes = 33851,76.

II. Beispiel:

Es sei (Fig. 29.) in einem Flächenmaße das Viereck AC oder Tetrag. = 33851,76, und die Seite b = 155, und überdieß der Winkel A = 114° 30′, dann der Winkel C = 96° 30′, und D = 53° 50′, wie groß ist die Seite AB oder a dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Den gegebenen Stücken gemäß ist nach dem II. Zusatze des vorigen §.

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} + \frac{2 \text{ Tetrag. Sin. } D - b^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Sin } (C + D)}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + D)}\right)}.$$

2) Nach Nro. 2. der vorigen Auflösung ist, da die nämlichen Winkel gegeben sind, Sin. A = Sin. 65° 30′, dann Sin. C = Sin. 83° 30′, ferner Sin. D = Sin. 53° 50′, und Sin. $(A + D)$ = Sin. 11° 40′, wie auch Sin. $(C + D)$ = Sin. 29° 40′.

3) Uiberdieß ist

$$\begin{aligned} 2 \text{ Tetrag. Sin. } D &= +\ 54657{,}38, \\ -\ b^2 \,.\, \text{Sin. } C \text{ Sin. } (C + D) &= -\ 11814{,}8, \\ &= +\ 42842{,}58; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 42842{,}58 &= 4{,}6318756, \\ \text{Log. } (\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + D)) &= 0{,}2648418 - 1 \\ &= 5{,}3670338 \end{aligned}$$

$$= \text{Log. } 232827{,}3;$$

$$\text{und } \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} = +\ 579995,$$

$$+\ 232827{,}3,$$

$$= +\ 812822{,}3,$$

$$\text{wie auch } \sqrt{812822{,}3} = +\ 901{,}56666,$$

$$\text{ferner } -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} = -\ 761{,}576,$$

weßhalb a = + 139,9906.

Die gesuchte Seite a ist demnach = 139,9906, somit beinahe = 140.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 30.) im Trapez AC die Seite a = 140, und b = 155, und überdieß der Winkel A = 114° 30′, dann C = 126° 10′, und D = 53° 50′, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Trapezes?

Auflösung:

1) Weil hier nebst den zwei Seiten a und b auch die drei Winkel A, C und D bekannt sind, welche den übrigen zwei Seiten anliegen, so ist nach dem III. Zusatze des §. 73.

$$\text{Trap.} = ab \,.\, \sin. A + \frac{a^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. (A + D)}{2 \,.\, \sin. D}.$$

2) Ferner ist Sin. A = Sin. 65° 30′, dann Sin. D = Sin. 53° 50′, und Sin. (A + D) = Sin. 11° 40′.

3) Nach der Auflösung des vorstehenden I. Beispieles Nro. 3. ist

$$\frac{a^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. (A + D)}{2 \,.\, \sin. D} = 2233{,}73,$$

$$\text{und } ab \,.\, \sin. A = 19746{,}16,$$

also Trap. = 21979,89.

Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist demnach = 21979,89.

IV. Beispiel:

Wenn (Fig. 30.) nach einem Flächenmaaße der Flächeninhalt des Trapezes AC oder Trap. = 21979,89, und die Seite BC oder b = 155, und überdieß der Winkel A = 114° 30′, dann C = 126° 10′, und D = 53° 50′, wie groß ist die Seite AB oder a dieses Trapezes?

Auflösung:

1) Da hier nebst dem Flächeninhalte und der

Seite b auch die drei Winkel A, C und D gegeben sind, so ist nach dem IIi. Zusatze des §. 73. die gesuchte Seite AB, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} + \frac{2 \text{ Trap. Sin. } C}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + D)}\right)}.$$

2) Nach Nro. 2 und 3. der vorigen Auflösung des III. Beispieles ist

$$\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)} = 382912{,}5,$$

$$\text{und } \frac{2 \text{ Trap. Sin. } C}{\text{Sin. } A \;\; \text{Sin. } (A + D)} = 192864,$$

$$= 575776{,}5,$$

$$\text{und } \sqrt{575776{,}5} = + 758{,}799,$$

$$\text{dann } -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin } (A + D)} = -618{,}799,$$

folglich $a = + 140$.

Die gesuchte Seite AB oder a ist daher wieder $= 140$.

V. Beispiel:

Wenn (Fig. 31.) im Parallelogramme AC die Seite AB oder $a = 140$, dann BC oder $b = 240$, und der Winkel $A = 126° 10'$, oder wenn die Seite $a = 140$, dann $AD = d = 240$, und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $A = 126° 10'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Parallelogrammes?

Auflösung:

1) Es gibt immer den nämlichen Flächeninhalt, es mögen die Seiten a und b nebst dem Winkel A oder B, oder die Seiten a und d nebst dem Winkel A gegeben sein, weil im Parallelogramme die Seite $b = d$, und $A + B = 180°$ (I. §. 48. Zus. II. und V.), somit Sin. A = Sin. B (II. §. 65.).

2) Wegen der gegebenen Stücke ist nach dem IV. und VI. Zusatze des §. 73.

Parall. = ab . Sin. *A*,

oder Parall. = ad . Sin. B = ad . Sin. *A*.

3) Nun ist, da Sin. *A* = Sin. 53° 50',

Log. a = 2,1461280,

dann Log. b = Log. d = 2,3802112,

und Log *Sin.* *A* = Log. *Sin.* *B* = 9,9070370 — 10,

also Log. Parall. = 4,4333762

= Log. 27125,4, und Parall. = 27125,4.

Der Flächeninhalt dieses Parallelogrammes ist demnach = 27125,4.

VI. Beispiel:

Wenn (Fig. 31.) in einem Flächenmaaße der Flächeninhalt des Parallelogrammes AC = 27125,4, dann die Seite b = 240, und der Winkel *A* = 126° 10', wie groß ist die Seite AB oder a?

Auflösung:

1) Den gegebenen Stücken gemäß ist nach dem IV. Zusatze des §. 73. die Seite AB, oder

$$a = \frac{\text{Parall.}}{b \,.\, \mathit{Sin.}\ A};$$

2) Nun ist Log. Parall. = 4,4333761,

und Log. (b . *Sin* A) = 2,2872482,

also Log. a = 2,1461279

= Log. 140, und a = 140.

Die gesuchte Seite AB oder a ist daher = 140.

§. 75.

IV. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 32.) im Vierecke AC die zwei gegenüberstehenden Seiten BC und AD oder b und d, und die drei Winkel A, C und D bekannt sind, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{4}\left[d^2 \,.\, Sin.\ 2D + b^2 \,.\, Sin.\ 2C - 2\,Cot.\,(A + D)\,(d^2 \,.\, Sin.\ D^2 - b^2 \,.\, Sin.\ C^2)\right].$$

Beweis:

1) Man ziehe aus A und B auf die Viereckſeite CD die Perpendikel AE und BF, und auf AE von B das Perpendikel BG (I. §. 33.), es iſt $BF = GE$ (I. §. 41. Zuſ. V.).

2) Im rechtwinklichten Dreiecke AED verhält ſich (II. §. 104.)

$AD : AE = r : Sin.\ D$, oder $d : AE = 1 : Sin.\ D$, und $AD : DE = r : Cos.\ D$, oder $d : DE = 1 : Cos.\ D$, weßhalb $AE = d \,.\, Sin.\ D$, und $DE = d \,.\, Cos.\ D$.

3) Der Flächeninhalt des Dreieckes AED iſt $= \tfrac{1}{2} DE \,.\, AE$, und daher

$$\begin{aligned} \triangle AED &= \tfrac{1}{2} \,.\, d \,.\, Sin.\ D \,.\, d \times Cos.\ D \\ &= \tfrac{1}{2} d^2 \,.\, Sin\ D \,.\, Cos.\ D \\ &= \tfrac{1}{2} d^2 \times \tfrac{1}{2}\ Sin.\ 2D \\ &= \tfrac{1}{4} d^2 \,.\, Sin.\ 2D \text{ (II. §. 83. Zuſ. II.).} \end{aligned}$$

4) Aus den nämlichen Gründen iſt im rechtwinklichten Dreiecke BCF

$BF = b \,.\, Sin.\ C$, und $CF = b \,.\, Cos.\ C$,

weßhalb $\triangle BCF = \tfrac{1}{2}\, CF \,.\, BF$

$= \tfrac{1}{2} b \,.\, Sin.\ C \,.\, b \,.\, Cos.\ C = \tfrac{1}{2} b^2 \,.\, Sin.\ C \,.\, Cos.\ C$

$= \tfrac{1}{4} b^2 \,.\, Sin.\ 2C.$

5) Die Linie AG iſt $= AE - GE = AE - BF$ $= d \,.\, Sin.\ D - b \,.\, Sin.\ C$ (Nro. 1. und 2., und Nro. 4.).

6) Ferner iſt der Winkel BAE oder $\alpha = A - \beta$ $= A - (R - D) = A + D - R$, indem $\sphericalangle BAD = A$, und im rechtwinklichten Dreiecke AED der Winkel $\beta = R - D$ (I. §. 43. Zuſ. V.); überdieß iſt der ſpitzige Winkel α das Komplement zur Summe der Winkel $A + D$, und dieſe letztere fällt in zweiten Quadranten, da $\alpha = A + D - R$, und $R = (A + D) - \alpha$, weßhalb $Tang.\ \alpha = -Cot.\ (A + D)$ (II. §. 60., und §. 79. Zuſ. I.).

7) Im Dreiecke ABG verhält sich (II. §. 105.)

$AG : GB = r : \text{Tang. } \alpha$, oder (Nro. 5. und 6.),

$d \cdot \text{Sin } D - b \cdot \text{Sin. } C : BG = 1 : -\text{Cot. } (A + D)$,

mithin $BG = -\text{Cot } (A+D) \times (d \cdot \text{Sin. } D - b \cdot \text{Sin. } C)$.

8) Der Flächeninhalt des Trapezes AF ist (I. §. 157.), oder (Nro. 2., dann 4 und 7.)

$$\text{Trapez. } AF = (AE + BF) \cdot \tfrac{1}{2} BG$$
$$= (d \cdot \text{Sin. } D + b \cdot \text{Sin. } C) \times -\tfrac{1}{2} \text{Cot. } (A + D)$$
$$(d \cdot \text{Sin } D - b \cdot \text{Sin. } C)$$
$$= -\tfrac{1}{2} \text{Cot. } (A + D)\,(d^2 \cdot \text{Sin. } D^2 - b^2 \cdot \text{Sin. } C^2)$$

(Arithm. III. §. 87. Nro. VI.), weßhalb der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \triangle AED + \triangle BCF + \text{Trapez. } AF$$
$$= \tfrac{1}{4} d^2 \cdot \text{Sin. } 2D + \tfrac{1}{4} b^2 \text{ Sin. } 2C$$
$$- \tfrac{1}{2} \text{Cot. } (A + D)\,(d^2 \cdot \text{Sin. } D^2 - b^2 \text{ Sin. } C^2)$$
$$= \tfrac{1}{4}\big[d^2 \cdot \text{Sin. } 2D + b^2 \cdot \text{Sin. } 2C$$
$$- 2 \cdot \text{Cot. } (A + D)\,(d^2 \cdot \text{Sin. } D^2 - b^2 \text{ Sin. } C^2)\big].$$

I. Zusatz: Durch (Fig. 32.) die zwei gegenüberstehenden Seiten b und d, und durch die drei Winkel A, C und D ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

II. Zusatz: Wenn (Fig. 30.) die Seite BC mit AD parallel, und deßhalb das Viereck AC ein Trapez ist, so ist $C + D = 180°$, mithin Sin. C $=$ Sin. D, und $C = 2R - D$, weßhalb $2C = 4R - 2D$, und Sin. $2C = -$ Sin. $2D$ (II. 65), folglich

$$\text{Trapez. } = \tfrac{1}{4}\big[d^2 \cdot \text{Sin. } 2D + b^2 \cdot \text{Sin. } 2D$$
$$- 2 \cdot \text{Cot. } (A + D)\,(d^2 \cdot \text{Sin. } D^2 - b^2 \text{ Sin. } D^2)\big]$$
$$= \frac{d^2 - b^2}{4} (\text{Sin. } 2D - 2 \text{ Cot. } (A + D) \text{ Sin. } D^2)$$
$$= \tfrac{1}{4}\big[(d+b)(d-b)(\text{Sin. } 2D - 2\text{Cot. } (A+D) \text{Sin. } D^2)\big].$$

§. 76.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 32.) im Vierecke AC die Seite BC

oder b = 160, und AD oder d = 260, und überdieß der Winkel A = 65° 30′, dann C = 88° 40′ 20″, und D = 72° 50′, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Nach dem im vorigen §. aufgestellten Lehrsatze ist wegen der hier gegebenen Stücke der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{4}\left[d^2 \,.\, \text{Sin. } 2D + b^2 \,.\, \text{Sin. } 2C - 2\,\text{Cot.}\,(A + D)\,(d^2 \,.\, \text{Sin. } D^2 - b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2)\right].$$

2) Nun ist

Log. d^2 = Log. d × 2 = 4,8298466,
und Log. Sin. 2D = 9,7512842 — 10,

also Log. (d^2 . Sin. 2D) = 4,5811308
= 38118,06, und d^2 . Sin. 2D = 38118,06;

Log. b^2 = Log. b × 2 = 4,4082400,
und Log. Sin. 2C = 8,6658773 — 10,

also Log. (b^2 . Sin. 2C) = 3,0741173
= Log. 1186,09, und b^2 . Sin. 2C = 1186,09.

3) Ferner ist

Log. d^2 = 4,8298466,
und L. Sin. D^2 = L. Sin. D × 2 = 0,9604162 — 1,

also Log. d^2 . Sin. D^2 = 4,7902628
= Log. 61696,83, und d^2 . Sin. D^2 = 61696,83;

Log. b^2 = 4,4082400,
und Log. Sin. C^2 = L. Sin. C × 2 = 0,9997668 — 1,

also Log. (b^2 . Sin. C^2 = 4,4080068
= 25586,26, und b^2 . Sin. C^2 = 25586,26;
überdieß ist 61696,83 — 25586,26 = 36110,57,

und Log. 36110,57 = 4,5576343,
dann Log. Cot. (A + D) = 10,0506469 — 10,
und Log. 2 = 0,3010300,

= 4,9093112
= Log. 81154,24, weßhalb — 2 Cot. (A + D) (d^2 . Sin. D^2 — b^2 . Sin. C^2)

$= 81154{,}24,$
dann $d^2 . \sin. 2D = 38118{,}06,$
und $b^2 . \sin. 2C = 1186{,}09,$

also 4 Tetrag. $= 120458{,}39,$
und Tetrag. $= \frac{1}{4} \times 120458{,}39 = 30139{,}5975.$

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist demnach $= 30139{,}5975.$

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 30.) das Viereck AC ein Trapez ist, und in diesem die Seite BC oder $b = 160$, AD oder $d = 235$, der Winkel $A = 116° 30'$, der Winkel $D = 46° 20'$, und der Winkel $C = 133° 40'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Trapezes?

Auflösung:

1) Wegen der hier gegebenen Stücke ist nach dem II. Zusatze des § 75. der Flächeninhalt dieses Trapezes, oder

$$\text{Trapez.} = \tfrac{1}{4}\left[(d + b)\,(d - b) \times (\sin. 2D - 2 \cot. (A + D) . \sin. D^2)\right].$$

2) Nun ist

Log. $\sin. D^2 =$ L. $\sin. D \times 2 = 0{,}7187198 - 1,$
dann Log. $\cot. (A + D) = 10{,}5101620 - 10,$
und Log. $2 = 0{,}3010300,$

also Log. $(2 . \cot. D .....) = 0{,}5299118$
$=$ Log. $3{,}38775$, und
$- 2 \cot. (A + D) . \sin. D^2 = 3{,}38775,$
$+ \sin. 2D = 0{,}998917,$
$= 4{,}386667;$

ferner ist Log. $4{,}385867 = 0{,}6410454,$
dann Log. $(d + b) = 2{,}5965971,$
und Log. $(d - b) = 1{,}8750613,$

weßhalb Log. 4 Trapez. $= 5{,}1127038$
$=$ Log. 129629, und Trapez. $= 32407{,}25.$

Es ist daher der Flächeninhalt dieses Trapezes = 32407,25.

§. 77.

V. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 29.) im Vierecke AC die drei Seiten a, b und d bekannt, und die drei Winkel A, C und D gegeben sind, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} (b \,.\, \text{Sin. } (C + D) + a \,.\, \text{Sin. } A) + \tfrac{1}{2} ad \,.\, \text{Sin. } A.$$

Beweis:

1) Man ziehe durch B zu AD die Parallele B*E*, und durch *E* zu BA die Parallele *EF*, und zugleich aus C und *E* auf AD die Perpendikel CG und CM.

2) Es ist, wenn der Winkel CB*E* = α, und C*E*B = β gesetzt wird, β = D, dann *F* oder *E*FD = A, ferner *E*M = HG, und EF = BA (I. §. 41.).

3) Im Dreiecke BC*E* verhält sich

$$BE : BC = \text{Sin. } C : \text{Sin. } \beta,$$

weßhalb $$BE = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } \beta} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } D}.$$

4) Im rechtwinklichten Dreiecke *B*CH ist (II. §. 104.), weil β = D, und $\alpha + C + \beta = \alpha + C + D = 180°$, somit Sin. α = Sin. (C + D),

$$CH = b \,.\, \text{Sin. } \alpha = b \,.\, \text{Sin. } (C + D), \text{ folglich}$$

$$\triangle BCE = \tfrac{1}{2} BE \,.\, CH = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} (b \,.\, \text{Sin. } (C + D)).$$

5) Im rechtwinklichten Dreiecke *E*FM ist (II. §. 104.), weil der Winkel *E*FD = A, und *E*FD + *E*FM = A + *E*FM = 180° (I. §. 11. Zus. III.),

mithin Sin. EFM = Sin. A (II. §. 65.), die Linie $EM = HG = EF$. Sin. EFM = a . Sin. A.

6) Deßhalb ist Trapez. BD = (AD + BE) . ½HG,

$$= \left(d + \frac{b \text{ . Sin. } C}{\text{Sin. } D}\right) \text{ . } ½a \text{ . Sin. A}$$

$$= ½ad \text{ . Sin. A} + \frac{b \text{ . Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} \text{ . a . Sin. A, und}$$

Tetrag. = $\triangle BCE$ + Trapez. BD

$$= \frac{b \text{ . Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} (b \text{ . Sin. } (C + D))$$

$$+ \frac{b \text{ . Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} \text{ . a . Sin. A} + ½ad \text{ . Sin. A}$$

$$= \frac{b \text{ . Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} (b \text{ . Sin. } (C + D) + a \text{ . Sin. A})$$

$$+ ½ad \text{ . Sin. A (Nro. 4 und 6.).}$$

I. Zusatz: Durch (Fig. 29.) die drei Seiten a, b und d, und durch die drei Winkel A, C und D ist der Flächeninhalt des Viereckes AC gegeben.

II. Zusatz: Wenn (Fig. 30.) die Seite BC mit AD, somit b mit d parallel ist, so ist C + D = 180°, somit Sin. C = Sin. D, und Sin. (C + D) = Sin. 180° = 0 (II. §. 66. b.), weßhalb der Flächeninhalt des Trapezes AC, da das Perpendikel EM oder CH nach Nro. 5. des vorstehenden Beweises = Bm = a . Sin. A, oder

Trapez. = (BC + A D) . ½CH

= (b + d) ½a . Sin. A = ½a . Sin. A (b + d).

III. Zusatz: Wenn (Fig. 30.) das Viereck AC ein Trapez, und deßhalb b mit d parallel ist, so ist, weil C + D = 180°, dann Sin. C = Sin. D, und Sin. (C + D) = 0, bei der Formel des vorstehenden Lehrsatzes

$$\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{2 \,.\, \text{Sin. } C} = \tfrac{1}{2}b, \text{ und}$$

$$b \,.\, \text{Sin. } (C + D) = b \times 0 = 0, \text{ weßhalb}$$

$$\text{Trapez.} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{2 \text{ Sin. } D} (b \,.\, \text{Sin. } (C + D) + a \,.\, \text{Sin. } A)$$

$$+ \tfrac{1}{2}ad \,.\, \text{Sin. } A$$

$$= \tfrac{1}{2}b \times a \,.\, \text{Sin. } A + \tfrac{1}{2}ad \,.\, \text{Sin. } A, \text{ und daher wieder}$$

$$\text{Trapez.} = \tfrac{1}{2}a \,.\, \text{Sin. } . \, A \; (b + d).$$

IV. Zusatz: Wenn (Fig. 30.) beim Trapez AC von den fünf Stücken, nämlich von dem Flächeninhalte und dem Winkel A, und von den drei Seiten a, b und d außer a alle Stücke bekannt sind, so läßt sich die Seite a berechnen.

Nach dem II. und III. Zusatze ist

$$\text{Trapez.} = \tfrac{1}{2}a \,.\, \text{Sin. } A \; (b + d),$$

weßhalb $2 \text{ Trapez.} = ab \,.\, \text{Sin. } A + ad \,.\, \text{Sin. } A$, und somit (Arithm. III. §. 98.)

$$a = \frac{2 \text{ Trapez.}}{\text{Sin. } A \; (b + d)}.$$

§. 78.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Wenn (Fig. 29.) im Vierecke AC die Seite $a = 140$, dann $b = 160$, und $d = 240$, und überdieß der Winkel $A = 112° \; 30'$, dann $C = 96° \; 40'$, und $D = 53° \; 10'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Vierecks?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des vorigen §. ist wegen der hier gegebenen Stücke

$$\text{Tetrag.} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{2 \,.\, \text{Sin. } D} (b \,.\, \text{Sin. } (C + D) + a \,.\, \text{Sin. } A)$$

$$+ \tfrac{1}{2}ad \,.\, \text{Sin. } A.$$

2)

2) Weil der Winkel $A = 112° 30'$, dann $C = 96° 40'$, ferner $D = 53° 10'$, und $C + D = 149° 50'$, so ist Sin. A = Sin. $67° 30'$, dann Sin. C = Sin. $83° 20'$, ferner Sin. D = Sin. $53° 10'$, und Sin. $(C + D)$ = Sin. $30° 10'$.

3) Nun ist

Log. b = 2,2041200,	Log. a = 2,1461280,
L.Sin.(C+D) = 9,7011508 − 10,	Log. Sin. A = 9,9656153 − 10,
= 1,9052708;	= 2,1117433
= Log. 80,4027;	= Log. 129,343;

b . Sin. $(C + D)$ = 80,4027
+ a . Sin. A = 129,343

also b . Sin. $(C + D)$ + a . Sin. A = 209,7457;

Log. b = 2,2041200,	Log. 2 = 0,3010300,
Log. Sin. C = 9,9970535 − 10,	Log. Sin. D = 9,9032977 − 10,
= 2,2011735;	= 0,2043277;

Log. (b . Sin. C) = 2,2011735,
Log. (2 . Sin. D) = 0,2043277,

folglich Log. $\left(\frac{\text{b . Sin. } C}{2 \text{ . Sin. } D}\right)$ = 1,9968458,

dann Log. 209,7457 = 2,3216931,

= 4,3185389

= Log. 20822,8;

ferner ist Log. $\frac{1}{2}$a = 1,8450980,
dann Log. d = 2,3802112,
und Log. Sin. A = 9,9656153 − 10,

also Log. ($\frac{1}{2}$ad . Sin. A) = 4,1909245

= Log. 15521,17.

Es ist nun

$\frac{\text{b . Sin. } C}{2 \text{ . Sin. D}}$(b . Sin.$(C+D)$ + a . Sin.A) = 20822,8,

und $\frac{1}{2}$ad . Sin. A = 15521,17,

folglich Tetrag. = 36343,97.

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße = 36343,97.

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 30.) beim Trapeze $\overline{AC}$, bei welchem BC mit AD parallel ist, der Winkel $A = 115° 30'$, dann die Seite $a = 150$, ferner die Seite $b = 160$, und die Seite $d = 240$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Trapezes?

Auflösung:

1) Nach dem II. Zusatze des §. 77. ist wegen der hier gegebenen Stücke der Flächeninhalt dieses Trapezes, oder

$$\text{Trapez.} = \tfrac{1}{2}a \,.\, \text{Sin. } A \,.\, (b + d).$$

2) Nun ist $A = 115° 30'$, mithin $\text{Sin. } A = 64° 30'$; ferner ist

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}a = \text{Log. } 75 = 1{,}8750613,$$

dann $\text{Log Sin. } A = 9{,}9554882 - 10,$

und $\text{Log. } (b + d) = \text{Log. } 400 = 2{,}6020600,$

also $\text{Log. Trapez.} = 4{,}4326095$

$= \text{Log. } 27077{,}56$, und $\text{Trapez.} = 27077{,}56.$

Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße $= 27077{,}56$.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 30.) der Flächeninhalt des Trapezes AC, oder $\text{Trapez.} = 27077{,}56$, dann der Winkel $A = 115° 30'$, ferner die Seite $b = 160$, und die Seite $d = 240$, wie groß ist die Seite AB oder a dieses Trapezes?

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des vorigen §. ist den gegebenen Stücken gemäß die gesuchte Seite AB,

$$\text{oder } a = \frac{2 \text{ Trapez.}}{\text{Sin. } A\,(b + d)};$$

2) Weil der Winkel $A = 115° 30'$, so ist $\text{Sin. } A = \text{Sin. } 64° 30'$.

3) Ferner ist

Log. 2 = 0,3010300,	L. (b + d) = 2,6020600,
L. Tapez. = 4,4326095,	Log. Sin. A = 9,9554882—10,
= 4,7336395;	= 2,5575482;

Daher ist Log. (2. Trapez.) = 4,7336395,
und Log. (Sin. A . (b. + d)) = 2,5575482,

folglich ist Log. a = 2,1760913
= Log. 150, und a = 150.

Die gesuchte Seite AB oder a dieses Trapezes ist daher = 150.

§. 79.

VI. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 33.) im Vierecke AC nebst den Seiten a, c und d auch die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel A und D bekannt sind, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

Tetrag. = $\frac{1}{2}$d (a . Sin. A + c . Sin. D) — $\frac{1}{2}$ac × Sin. (A + D).

Beweis:

1) Man ziehe von B auf die Seite AD oder d das Perpendikel BE, dann von C auf BE das Perpendikel CF, und von D auf CF das Perpendikel DG (I. §. 33.), während man den Winkel GDC mit δ bezeichnet.

2) Im rechtwinklichten Dreiecke ABE verhält sich (II. §. 104.)

AB : BE = r : Sin. A, und AB : AE = r : Cos. A, oder a : BE = 1 : Sin. A, und a : AE = 1 : Cos. A, weßhalb BE = a . Sin. A, und AE = a . Cos. A.

3) Der Flächeninhalt des Dreieckes ABE ist = $\frac{1}{2}$BE × AE, und daher

△ ABE = $\frac{1}{2}$. a . Sin. A × a . Cos. A
= $\frac{1}{2}a^2$. Sin. A . Cos. A.

4) Die Linie DE ist = AD — AE = d — a × Cos. A, und im rechtwinklichten Dreiecke DGC ist der Winkel GDC oder δ = EDC — EDG = D

$= R$, mithin $R = D - \delta$, und $\text{Sin.}\,\delta = -\text{Cos.}\,D$ (II. §. 60. und §. 71.), wie auch $\text{Cos.}\,\delta = \text{Sin.}\,D$.

5) Ferner verhält sich (II. §. 104.)

$$CD : CG = r : \text{Sin.}\,\delta,$$

oder $$c : CG = 1 : \text{Sin.}\,\delta,$$

und $$CD : DG = r : \text{Cos.}\,\delta,$$

oder $$c : DG = 1 : \text{Cos.}\,\delta,$$

weßhalb $$CG = c\,.\,\text{Sin.}\,\delta = -c\,.\,\text{Cos.}\,D,$$

und $$DG = c\,.\,\text{Cos.}\,\delta = c\,.\,\text{Sin.}\,D.$$

6) Die Linie $BF = BE - FE = BE - GD = a\,.\,\text{Sin.}\,A - c\,.\,\text{Sin.}\,D$ (Nro. 2 und 5, und I. §. 41. Zus. IV.).

7) Die Linie $CF = FG + GC = ED + GC = AD - AE + GC = d - a\,.\,\text{Cos.}\,A - c\,.\,\text{Cos.}\,D$ (Nro. 2 und 5.); folglich ist der Flächeninhalt des Dreieckes BFC, oder (Nro. 6 und 7.)

$$\triangle BFC = \tfrac{1}{2}CF\,.\,BF = \tfrac{1}{2}(d - a\,.\,\text{Cos.}\,A - c\,.\,\text{Cos.}\,D) \times (a\,.\,\text{Sin.}\,A - c\,.\,\text{Sin.}\,D)$$
$$= \tfrac{1}{2}(ad\,.\,\text{Sin.}\,A - a^2\,.\,\text{Sin.}\,A\,.\,\text{Cos.}\,A - ac\,.\,\text{Sin.}\,A\,.\,\text{Cos.}\,D - cd\,.\,\text{Sin.}\,D + ac \times \text{Cos.}\,A\,.\,\text{Sin.}\,D + c^2\,.\,\text{Sin.}\,D\,.\,\text{Cos.}\,D).$$

8) Uiberdieß ist der Flächeninhalt des Trapezes EC, oder (Nro. 4, 5 und 7.)

Trapez. $$EC = \tfrac{1}{2}(FC + DE) \times DG \quad \text{(I. §. 157.)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(d - a\,.\,\text{Cos.}\,A - c\,.\,\text{Cos.}\,D + d - a\,.\,\text{Cos.}\,A) \times c\,.\,\text{Sin.}\,D = \tfrac{1}{2}(2d - 2a \times \text{Cos.}\,A - c\,.\,\text{Cos}\,D) \times c\,.\,\text{Sin.}\,D$$
$$= \tfrac{1}{2}(2cd\,.\,\text{Sin.}\,D - 2ac\,.\,\text{Cos.}\,A\,.\,\text{Sin.}\,D - c^2\,.\,\text{Sin.}\,D\,.\,\text{Cos.}\,D),$$

folglich ist der Flächeninhalt des ganzen Viereckes AC, oder (Nro. 3, 7 und 8.)

Tetrag. $$AC = \triangle ABE + \triangle BFC + \text{Trapez. EC}$$
$$= \tfrac{1}{2}[a^2\,.\,\text{Sin.}\,A\,.\,\text{Cos.}\,A + ad\,.\,\text{Sin.}\,A - a^2 \times \text{Sin.}\,A\,.\,\text{Cos.}\,A - ac\,.\,\text{Sin.}\,A\,.\,\text{Cos.}\,D - cd\,.\,\text{Sin.}\,D + ac\,.\,\text{Cos.}\,A\,.\,\text{Sin.}\,D + c^2 \times \text{Sin.}\,D\,.\,\text{Cos.}\,D + 2cd\,.\,\text{Sin.}\,D - 2ac \times \text{Cos.}\,A\,.\,\text{Sin.}\,D - c^2\,.\,\text{Sin.}\,D\,.\,\text{Cos.}\,D]$$

$= \frac{1}{2}[ad \cdot \text{Sin. A} - ac \cdot (\text{Sin. A} \cdot \text{Cos. D} + \text{Cos. A} \cdot \text{Sin. D}) + cd \cdot \text{Sin. D}]$
$= \frac{1}{2}d(a \cdot \text{Sin. A} + c \cdot \text{Sin. D}) - \frac{1}{2}ac \times \text{Sin. (A + D)}$ (II. §. 83.).

I. Zusatz: Wenn (Fig. 33.) beim Vierecke AC nebst den drei Seiten a, c und d auch die davon eingeschlossenen Winkel A und D bekannt sind, so ist der Flächeninhalt dieses Viereckes gegeben.

II. Zusatz: Wenn (Fig. 33.) beim Vierecke AC aus den drei Seiten a, c und d zwei Seiten, und überdieß die davon eingeschlossenen zwei Winkel A und D bekannt sind, so läßt sich bei diesen Seiten aus den gegebenen Stücken die dritte unbekannte Seite finden.

Wenn die Stücke c, d, A und D gegeben sind, und man sucht die Seite a, so ist nach dem Lehrsatze dieses §.

Tetrag. $= \frac{1}{2}d(a \cdot \text{Sin. A} + c \cdot \text{Sin. D}) - \frac{1}{2}ac \times \text{Sin. (A + D)}$, weßhalb (Arithm. III. §. 98.)

Tetrag. $= \frac{1}{2}ad \cdot \text{Sin. A} + \frac{1}{2}cd \cdot \text{Sin. D} - \frac{1}{2}ac \times \text{Sin. (A + D)}$, und

Tetrag. $- \frac{1}{2}cd \cdot \text{Sin. D} = (\frac{1}{2}d \cdot \text{Sin. A} - \frac{1}{2}c \times \text{Sin. (A + D)}) \times a$, also

$$a = \frac{\text{Tetrag.} - \frac{1}{2}cd \cdot \text{Sin. D}}{\frac{1}{2}d \cdot \text{Sin. A} - \frac{1}{2}c \cdot \text{Sin. (A + D)}}.$$

III. Zusatz: Ist (Fig. 34.) das Viereck AC ein Trapez, und die bekannte Seite a mit der gegebenen Seite c parallel, und überdieß die dritte bekannte Seite AD oder d zugleich die Höhe des Trapezes, so daß A und D rechte Winkel sind, und Sin. A $= r = 1$, dann Sin. D $= r = 1$, wie auch Sin. (A + D) $=$ Sin. 180 $= 0$ (II. §. 66.), so ist der Flächeninhalt des Trapezes, oder

Trapez. $= \frac{1}{2}d(a \cdot \text{Sin. A} + c \cdot \text{Sin. D}) - \frac{1}{2}ac \times \text{Sin. (A + D)}$
$= \frac{1}{2}d(a \times 1 + c \times 1 - \frac{1}{2}ac \times 0)$
$= \frac{1}{2}d(a + c) = (a + c) \times \frac{1}{2}d$ (I. §. 157.).

IV. Zusatz: Wenn (Fig. 34.) im Trapeze AC, dessen Höhe der Seite AD oder d gleich ist, aus den drei Seiten a, c und d zwei Seiten nebst dem Flä-

cheninhalte bekannt sind, so kann man die dritte unbekannte Seite finden; ist diese die Seite AB oder a, so ist nach dem vorstehenden III. Zusatze

Trapez. $=(a+c)\times{}^1/_2 d$, somit (Arithm. III. §. 98.)

$$a=\frac{2\,\text{Trapez.}}{d}-c.$$

§. 80.

Beispiele zum vorigen §.

I. Beispiel:

Wenn (Fig. 33.) im Vierecke AC die Seite $a=190$, dann $c=153$, und $d=230$, und überdieß der Winkel $A=35^\circ\,30'$, und $D=143^\circ\,20'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des vorigen §. ist den hier gegebenen Stücken gemäß der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.}=\tfrac{1}{2}d(a\,.\,\text{Sin. A}+c\,.\,\text{Sin. D})-\tfrac{1}{2}ac\times\text{Sin.}(A+D).$$

2) Weil der Winkel $A=35^\circ\,30'$, und der Winkel $D=143^\circ\,20'$, mithin $A+D=178^\circ\,50'$, so ist Sin. $A=$ Sin. $35^\circ\,30'$, dann Sin. $D=$ Sin. $36^\circ\,40'$, und Sin. $(A+D)=$ Sin. $1^\circ\,10'$.

3) Nun ist

Log. a $=2{,}2737536$,	Log. c $=2{,}1846914$,
Log. Sin. A $=9{,}7639540-10$,	Log. Sin. D $=9{,}7760897-10$,
$=2{,}0427076$,	$=1{,}9607811$,
$=$ Log. 110,334;	$=$ Log. 91,3653.

folglich a . Sin. A + c . Sin. D $=110{,}334+91{,}3653$
$=201{,}6993$,

und Log. $201{,}6993=2{,}3047044$,
ferner Log. $\tfrac{1}{2}d=2{,}0606978$,

$=4{,}3654022$
$=$ Log. 23195,4.

4) Uiberdieß ist

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}a = 1{,}9777236,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}1846914,$$
$$\text{Log. Sin } (A + D) = 8{,}3087941 - 10,$$
$$= 2{,}4712091$$
$$= \text{Log. } 295{,}944.$$

Es ist jetzt

$$\tfrac{1}{2}d(a \,.\, \text{Sin. } A + c \,.\, \text{Sin. } D) = +\ 23195{,}4,$$
$$\text{und} \quad -\tfrac{1}{2}ac \,.\, \text{Sin. } (A + D) = -\ 295{,}944,$$

also Tetrag $= +\ 22899{,}456.$

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist daher in einem bestimmten Flächenmaaße $= 22899{,}456.$

II. Beispiel:

Wenn (Fig. 33.) im Vierecke AC dessen Flächeninhalt in einem bestimmten Flächenmaaße $= 22899{,}456$, dann die Seite $c = 153$, und $d = 230$, und überdieß der Winkel $A = 35^\circ\ 30'$, und $D = 143^\circ\ 20'$, wie groß ist die Seite AB oder a dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Nach dem II. Zusatze des vorigen §. ist

$$a = \frac{\text{Tetrag.} - \tfrac{1}{2}cd \,.\, \text{Sin. } D}{\tfrac{1}{2}d \,.\, \text{Sin. } A - \tfrac{1}{2}c \,.\, \text{Sin. } (A + D)}.$$

2) Da der Winkel $A = 35^\circ\ 30'$, und $D = 143^\circ\ 20'$, so ist hier wieder Sin. $A =$ Sin. $35^\circ\ 30'$, dann Sin. $D =$ Sin. $36^\circ\ 40'$, und Sin. $(A + D) =$ Sin. $1^\circ\ 10'$.

3) Nun ist

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}d = 2{,}0606978,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}1846914,$$
$$\text{Log. Sin. } D = 9{,}7760897 - 10,$$
$$= 4{,}0214789$$
$$= \text{Log. } 10507;$$

$$\text{Tetrag.} = +\ 22899{,}456,$$
$$-\tfrac{1}{2}cd \,.\, \text{Sin. } D = -\ 10507,$$

also Tetrag. $-\ \tfrac{1}{2}cd \,.\, \text{Sin. } D = +\ 12392{,}456.$

4) Ferner ist

Log. $\frac{1}{2}$d = 2,0606978,
Log. Sin. A = 9,7639540 − 10,
= 1,8246518
= Log. 66,7809;

Log. $\frac{1}{2}$c = 1,8836614,
L. Sin.(A + D) = 8,3087914 − 10,
= 0,1924528
= Log. 1,55759;

$\frac{1}{2}$d . Sin. A = + 66,7809,
− $\frac{1}{2}$c . Sin. (A + D) = − 1,55759,

also $\frac{1}{2}$d . Sin. A − $\frac{1}{2}$c . Sin.(A + D) = + 65,22331.

5) Endlich ist

Log. 12392,456 = 4,0931573,
und Log. 65,22331 = 1,8144029,

folglich Log a = 2,2787544
= Log. 190,0001, und a = 190,0003.

Die gesuchte Seite AB oder a ist demnach in Gemäßheit der gegebenen Stücke = 190,0003, mithin wieder beinahe = 190.

III. Beispiel:

Wenn (Fig. 34.) im Trapeze AC, bei welchem AB mit DC parallel ist, die gegebene Seite AD oder d zugleich die Höhe desselben ist, und überdieß a = 199, dann c = 135, und d = 160, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Trapezes?

Auflösung:

1) Nach dem III. Zusatze des vorigen §. ist den gegebenen Stücken gemäß der Flächeninhalt dieses Trapezes, oder

Trapez. = (a + c) × $\frac{1}{2}$d.

2) Weil hier a = 199, dann c = 135, und d = 160, so ist a + c = 334, und $\frac{1}{2}$d = 80, somit (a + c) × $\frac{1}{2}$d = 334 × 80 = 26720; oder

Log. (a + c) = Log. 334 = 2,5237465,
und Log. $\frac{1}{2}$d Log. 80 = 1,9030900,

also Log. Trapez. = 4,4268365
= 26720, und Trapez. = 26720.

Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße = 26720.

IV. Beispiel:

Wenn (Fig. 34.) der Flächeninhalt des Trapezes AC, bei welchem die Seite AD oder d zugleich die Höhe, und AB mit DC parallel ist, in einem gewissen Flächenmaaße = 26720, und überdieß die Seite c = 135, und d = 160, wie groß ist die Seite AB oder a dieses Trapezes.

Auflösung:

1) Nach dem IV. Zusatze des vorigen §. ist vermöge der gegebenen Stücke

$$a = \frac{2\ \text{Trapez.}}{d} - c.$$

2) Weil der Flächeninhalt dieses Trapezes = 26720,

so ist $\frac{2\ \text{Trapez.}}{d} - c = \frac{2 \,.\, 26720}{160} - 135 = 334 - 135 = 199$; oder

$$\text{Log.}(2\,.\,\text{Trapez.}) = \text{Log. } 53440 = 4{,}7278664,$$
$$\text{und Log. } d = \text{Log. } 160 = 2{,}2041200,$$

$$\text{also Log.}\left(\frac{2\ \text{Trapez.}}{d}\right) = 2{,}5237464$$

$$= \text{Log. } 333{,}9999,$$

$$2\ \text{Trapez.} - c = 333{,}9999 - 135 = 198{,}9999.$$

Die gesuchte Seite AB oder a ist daher = 198,9999, somit beinahe wieder = 199.

§. 81.

VII. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 35.) im Vierecke AC die drei Winkel A, C und D, und ihre anliegenden Seiten a, c und d bekannt sind, so ist der Flächeninhalt des Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-a \,.\, \text{Sin.}(A + D + C)}{\text{Sin. } C} \times (d \,.\, \text{Sin. } D - a \,.\, \text{Sin.}(A + D)) + cd \,.\, \text{Sin. } D\right).$$

Beweis:

1) Man ziehe vom Punkte A zu BC oder b mit der Seite CD oder c die Parallele AE (I. §. 39.), dann von B auf CD das Perpendikel BF, und von D auf AE das Perpendikel DH (I. §. 33.), und setze zugleich den Winkel $BAE = \alpha$, dann $BEA = \varepsilon$, und und HAD oder $EAD = \beta$.

2) Weil nach Nro. 1. die Linie AE zu DC parallel ist, so ist der Winkel $\varepsilon = C$, dann $\beta + D = 2R$ (I. §. 41.), und $\beta = 2R - D$, weßhalb Sin. β = Sin. D (II. §. 65.); überdieß ist der Winkel BAE oder $\alpha = A - \beta = A - (2R - D) = A + D - 2R$, und $2R = (A + D) - \alpha$, also Sin. α = — Sin. $(A + D)$.

3) Im rechtwinklichten Dreiecke AGB verhält sich (II. §. 104.) AB : BG = r : Sin. α, mithin ist BG = a . Sin. α = — a . Sin. $(A + D)$.

4) Im Dreiecke ABE verhält sich (II. §. 112.)

$$AB : AE = \text{Sin. } \varepsilon : \text{Sin. } B,$$

$$\text{mithin ist } AE = \frac{a \text{ . Sin. } B}{\text{Sin. } \varepsilon};$$

ferner ist Sin. ε = Sin. C, und Sin. B = — Sin. $(A + C + D)$ (§. 22. b.),

$$\text{weßhalb } AE = \frac{-a \text{ . Sin. } (A + C + D)}{\text{Sin. C}}.$$

5) Der Flächeninhalt der Dreieckes ABE ist = ½AE × BG, somit nach Nro. 3 und 4.

$$\triangle ABE = \tfrac{1}{2}AE \text{ . } BG = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-a \text{ . Sin. } (A + C + D)}{\text{Sin. C}} \times -a \text{ . Sin. } (A + D)\right).$$

6) Im Dreiecke AHD ist (II. §. 104.) DH = d × Sin. β = d . Sin. D (Nro. 2.), daher ist der Flächeninhalt des Trapezes AC, oder (Nro. 4 und 6.)

$$\text{Trapez. } AC = \tfrac{1}{2}(AE + CD) \times DH$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{-a \,.\, Sin.(A+C+D)}{Sin.\,C} + c\right) \times d \,.\, Sin.\,D,$$

folglich ist der Flächeninhalt des ganzen Viereckes AC, oder (Nro. 5.)

$$\text{Tetrag. AC} = \triangle \text{ ABE} + \text{Trapez. AC}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{-a \,.\, Sin.(A+C+D)}{Sin.\,C}\right.$$

$$\left.(d \,.\, Sin.\,D - a \,.\, Sin.(A+D)) + cd \,.\, Sin.\,D\right).$$

Zusatz: Durch (Fig. 35.) die drei Winkel A, C und D, und durch die drei anliegenden Seiten a, c und d ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

§. 82.

Beispiel zum vorigen §.

Wenn (Fig. 35.) im Vierecke AC die Seite AB oder $a = 145$, dann CD oder $c = 176$, und AD oder $d = 160$, und überdieß der Winkel $A = 118° 20'$, dann $C = 72° 30'$, und $D = 81° 40'$, wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Nach dem Lehrsatze des vorigen §. ist den hier gegebenen Stücken gemäß der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-a \,.\, \text{Sin.}(A+D+C)}{\text{Sin. C}}\right.$$

$$\left.\times(d \,.\, \text{Sin.}\,D - a \,.\, \text{Sin.}(A+D)) + cd \,.\, \text{Sin.}\,D\right).$$

2) Die Summe der Winkel $A+D+C$ ist $= 272° 30'$, und $A+D$ ist $= 200°$, deßhalb ist $\text{Sin.}(A+D+C) = -\text{Sin.}\,87° 30'$, und $\text{Sin.}(A+D) = -\text{Sin.}\,20°$, während $\text{Sin. D} = \text{Sin.}\,81° 40'$.

3) Nun ist

Log. a = 2,1613680,	Log. d = 2,2041200,
L.S.(A+D+C) = 9,9995865 — 10,	L.Sin.D = 9,9953902 — 10,
= 2,1609545	= 2,1995102
Log. Sin. C = 9,9794195 — 10,	= Log. 158,3107.
= 2,1815350;	

Log. a = 2,1613680,
L. S. (A + D) = 9,5340517 — 10,
= 1,6954197
= Log. 49,5929;

+ 158,3107,
+ 49,5929,
= 207,9036,
und Log. 207,9036 = 2,3178620
+ 2,1815350
= 4,4993970
= Log. 31578,9;

endlich ist Log. c = 2,2455127,
dann Log. d = 2,2041200,
und Log. sin. D = 9,9953902 — 10,
= 4,4450229
= Log. 27862,7.

weßhalb 31578,9
+ 27862,7,

mithin Tetrag. = 59441,6 : 2 = 29720,8.

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist daher in einem bestimmten Flächenmaaße = 29720,8.

§. 83.

VIII. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 27.) im Vierecke AC alle vier Seiten, und die zwei gegenüber stehenden Winkel A und C gegeben sind, so ist der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

Tetrag. = ½(ad . Sin. A + bc . Sin. C).

Beweis:

1) Man ziehe die Diagonallinie BD, so sind im Dreiecke BAD nebst dem Winkel A die ihn einschließenden Seiten a und d, und im Dreiecke BCD ist nebst den Seiten b und c der von ihnen eingeschlossene Winkel C bekannt.

2) Den hier gegebenen Stücken gemäß ist nach §. 50.

$\triangle$ BAD = ½ad . Sin. A,
und $\triangle$ BCD = ½bc . Sin. C,

also Tetr. AC = $\triangle$ BAD + $\triangle$ BCD
= ½ad . Sin. A + ½bc . Sin. C
= ½(ad . Sin. A + bc . Sin C).

Zusatz: Durch alle vier Seiten, und durch zwei opponirte oder gegenüber stehende Winkel ist der Flächeninhalt eines Viereckes gegeben.

§. 84.

Beispiel zum vorigen §.

Wenn (Fig. 27.) im Vierecke AC die Seite a = 170, b = 260, c = 172, und d = 174, und überdieß der Winkel A = 134° 15', und C = 87° 30', wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) In Gemäßheit der hier gegebenen Stücke ist nach dem Lehrsatze des vorigen §. der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2}(ad \,.\, \text{Sin. A} + bc \,.\, \text{Sin. C}).$$

2) Weil der Winkel A = 134° 15', so ist Sin. A = Sin. 45° 45', und Sin. C = Sin. 87° 30'.

3) Nun ist

Log. a = 2,2304489,
dann Log. d = 2,2405492,
und L. Sin. A = 9,8550961 — 10,

also Log. (ad . Sin. A) = 4,3260942
= Log. = 21188,2;

ferner ist

Log. b = 2,4149733,
dann Log. c = 2,2355284,
und L. Sin. C = 9,9995865 — 10,

mithin Log. (bc . Sin. C) = 4,6500882
= Log. 44677,43;

weßhalb Tetrag. = ½(21188,2 + 44677,43)
= 65865,63 : 2 = 32932,815.

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist daher in einem bestimmten Flächenmaaße = 32932,815.

Anmerkung: 1) Es könnten außer den hier angeführten Lehrsätzen für die Berechnung der unbekannten Stücke der Vierecke aus den gegebenen Stücken noch mehrere Lehrsätze aufgestellt werden; es genügen aber die hier angegebenen Formeln, um bei geradlinigten ebenen

Figuren durch ihre Zertheilung in Vierecke den Flächeninhalt zu finden, und von ihnen unter gewissen Bedingungen Vierecke eines bestimmten Inhaltes abzuschneiden, oder dieselben in eine beliebige Anzahl gleicher, oder ungleicher Theile von bestimmter Größe zu theilen.

2) In Betreff der bei den vorstehenden Aufgaben vorkommenden Angaben von der Größe gegebener, oder gesuchter Flächen ward die dritte Anmerkung des §. 59. in Anwendung gebracht, und deßhalb wurden die Linien und Flächen in keinem bestimmten Maaße ausgedrückt.

§. 85.

I. Aufgabe, den Flächeninhalt einer geradlinigten ebenen Figur zu finden, wenn alle ihre Seiten und Winkel gegeben sind, und dieselbe durch Diagonallinien in Vierecke getheilt wird.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 36.) der Flächeninhalt des Siebeneckes ABC*D*E*F*G zu finden, und es seien alle Seiten und Winkel desselben bekannt.

2) Man ziehe von A nach D, und von D nach F die Diagonalen AD und DF, es wird dadurch das Vieleck, weil es eine ungerade Anzahl von Seiten hat, in die Vierecke ABC*D* und *A*D*F*G, und in das Dreieck *D*EF getheilt.

3) Beim ersten Vierecke *A*BC*D* sind die Seiten a, b und c, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel B und C, somit alle Seiten und Winkel, außer der Seite AD, und den beiden ihr anliegenden Winkeln C*D*A und B*AD*, bekannt.

4) Nach dem im §. 79. aufgestellten Lehrsatze kann man aus den gegebenen Stücken den Flächeninhalt, und nach den in den §§. 4 und 7. angeführten Lehrsätzen die Winkel CDA und BA*D*, und die Diagonallinie AD als die vierte Seite dieses Viereckes berechnen; es ist

$$\text{Tetrag. ABC}D = \tfrac{1}{2}\text{ab} \cdot \text{Sin. B} + \tfrac{1}{2}\text{bc} \cdot \text{sin. C} - \tfrac{1}{2}\text{dc} \cdot \text{Sin. (B} + \text{C)},$$

dann

$$\text{Tang. } BAD = \frac{b \,.\, \text{Sin. } B - c \,.\, \text{Sin.}(B + C)}{a - b \,.\, \text{Cos.} B + c \,.\, \text{Cos.}(B + C)},$$ und der Winkel $CDA = 360° - (B + C + BAD)$, wie auch $$AD = \frac{a - b \,.\, \text{Cos. } B + c \,.\, \text{Cos. } (B + C)}{\text{Cos. } (B + C + CDA)}.$$

5) Aus dem Polygonswinkel A, und dem Winkel BAD läßt sich der Winkel DAG des zweiten Viereckes bestimmen, es ist $DAG = A - BAD$, und es sind jetzt im Vierecke AF die drei Seiten f, g und AD, und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel G und DAG bekannt.

6) Nach dem im §. 79. angeführten Lehrsatze kann man aus diesen Stücken den Flächeninhalt des Viereckes AF finden; es ist dieser, oder

$$\text{Tetrag. AF} = \tfrac{1}{2}g \,.\, AD \,.\, \text{Sin. } DAG + \tfrac{1}{2}gf \,.\, \text{Sin } G - \tfrac{1}{2}f \,.\, AD \,.\, \text{Sin. } (DAG + G).$$

7) Würden noch mehrere Vierecke folgen, so würde man nach den bei Nro. 4. genannten weiteren Lehrsätzen die Diagonal DF, und die ihr anliegenden Winkel ADF und DFG berechnen; es wäre

$$\text{Tang. } ADF = \frac{g \,.\, \text{Sin. } DAG - f \,.\, \text{Sin. } (DAG + G)}{AD - g \,.\, \text{Cos } DAG + f \,.\, \text{Cos. } (DAG + G)},$$

und $DFG = 360° - (DAG + ADF + G)$, oder

$$\text{Tang. DFG} = \frac{g \,.\, \text{Sin. } G - AD \,.\, \text{sin. } (G + DAG)}{f - g \,.\, \text{Cos. } G + AD \,.\, \text{Cos. } (G + DAG)},$$

und dann $ADF = 360° - (DAG + DFG + G)$, und endlich wäre die Diagonallinie

$$DF = \frac{AD - g \,.\, \text{Cos } DAG + f \,.\, \text{Cos } (DAG + G)}{\text{Cos. } (DAG + DFG + G)},$$

oder $$DF = \frac{f - g \,.\, \text{Cos } G + AD \,.\, \text{Cos. } (G + DAG)}{\text{Cos. } (G + DAG + ADF)}.$$

8) Weil in diesem Polygon nur mehr der Flächeninhalt des Dreieckes DEF zu finden ist, und bei diesem nebst dem Winkel E die beiden ihn einschließenden Seiten d und e bekannt sind, so ist bei

dem Vierecke AF die Berechnung der Seite DF, und der beiden ihr anliegenden Winkel ADF und DFG nicht mehr nöthig, und es ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes, oder (§. 50.)

$$\triangle DEF = \frac{1}{2}de \cdot \sin. E.$$

9) Man bringe die drei gefundenen Flächen der beiden Vierecke, und des Dreieckes in eine Summe, und man erhält den ganzen Flächeninhalt dieses Siebeneckes.

§. 86.

Beispiel zur Aufgabe des vorigen §.

Man soll (Fig. 36.) den Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG durch dessen Vertheilung in Vierecke finden, wenn alle Seiten und Winkel bekannt sind, und dieselben folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten:
$a = 531,$
$b = 361,$
$c = 383,$
$d = 308,$
$e = 400,$
$f = 617{,}524,$
$g = 550{,}299;$

Die bekannten Winkel:
$A = 121° 13',$
$B = 113° 23',$
$C = 84° 44',$
$D = 270° 31',$
$E = 105° 55',$
$F = 91° 37',$
$G = 112° 37'.$

Auflösung:

1) Man ziehe von A nach D, und von D nach F die Diagonalen AD und DF, es wird das Siebeneck in die Vierecke ABCD und ADFG, und in das Dreieck DEF getheilt.

2) Im ersten Vierecke ABCD sind nebst den Seiten a, b und c die von ihnen eingeschlossenen Winkel B und C bekannt, deßhalb ist nach §. 85. Nro. 4. der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag. } AC = \frac{1}{2}ab \cdot \sin. B + \frac{1}{2}bc \cdot \sin. C - \frac{1}{2}ac \times \sin. (B + C).$$

Nun ist $\sin. B = \sin. 66° 37'$, dann $\sin. C = \sin. 84° 44'$, und $\sin. (B + C) = -\sin. 18° 7'$; ferner ist

Log.

Log. ½a = 2,4240645,
Log. b = 2,5575072,
L. sin. B = 9,9627812 — 10,
= 4,9443529
= Log. 87973,72;

Log. ½b = 2,2564772,
Log. c = 2,5831988,
L. sin. C = 9,9981626 — 10,
= 4,8378386
= Log. 68839,63;

Log. ½a = 2,4240645,
Log. c = 2,5831988,
Log. sin. (B + C) = 9,4926946 — 10,
= 4,4999579
= Log. 31619,707;

folglich ½ab . Sin. B = 87973,72,
dann + ½bc . Sin. C = 68839,63,
und — ½ac . Sin. (B + C) = 31619,707,
also Tetrag. AC = 188433,057.

3) Man berechne den Winkel BAD, es ist nach §. 85. Nro. 4.

$$\text{Tang. BAD} = \frac{b \,.\, \text{Sin. B} - c \,.\, \text{Sin. (B + C)}}{a - b \,.\, \text{Cos. B} + c \,.\, \text{Cos. (B + C)}}.$$

Nun ist

Log. b = 2,5575072,
L. S. B = 9,9627812 — 10,
= 2,5202884
= Log. 331,351;

Log. b = 2,5575072,
L. Cos. B = 9,5986602 — 10,
= 2,1561674
= Log. 143,274;

Log. c = 2,5831988,
L. Sin. (B + C) = 9,4926946 — 10,
= 2,0758934
= Log. 119,095;

Log. c = 2,5831988,
L. Cos. (B + C) = 9,9779180 — 10,
= 2,5611168
= Log. 364,013.

Es ist demnach

b . Sin. B = 331,351,
und — c . Sin. (B + C) = 119,095,
= 450,456;

und

a = 531,
— b . Cos. B = 143,274
+ c . Cos. (B + C) = ... — 364,013
= 674,274 — 364,013
= 310,261;

$$\text{mithin Tang. BAD} = \frac{450{,}456}{310{,}261} \times r,$$

und Log. $(450{,}456 \times r) = 12{,}6536514,$
dann Log. $310{,}261 = 2{,}4917272,$

folglich Log. Tang. BAD $= 10{,}1619242$
$=$ Log. Tang. $55^\circ\ 26'\ 34''$, und BAD $= 55^\circ\ 26'\ 34''$.

4) Durch den Polygonswinkel A, und den so eben gefundenen Winkel BAD ist der Viereckswinkel DAG bestimmt, es ist dieser oder $DAG = A - BAD$, und aus den drei Winkeln B, C und BAD kann man den Winkel CDA finden (I. §. 46.); es ist

$A = 121^\circ\ 13' = 121^\circ\ 12'\ 60''$,
und BAD $= 55^\circ\ 26'\ 34''$,

also DAG $= 65^\circ\ 46'\ 26''$;

ferner ist

B $= 113^\circ\ 23'$,
$+$ C $= 84^\circ\ 44'$,
$+$ BAD $= 55^\circ\ 26'\ 34''$,

also B $+$ C $+ BAD = 253^\circ\ 33'\ 34''$,
und CDA $= 360^\circ - 253^\circ\ 33'\ 34'' = 106^\circ\ 26'\ 26''$.

5) Man berechne endlich im Vierecke AC die Diagonal AD, oder bestimme vielmehr nur den Logarithmus von AD, es ist nach §. 85. Nro. 4.

$$AD = \frac{a - b \,.\, \text{Cos. B} + c \,.\, \text{Cos. (B} + \text{C)}}{\text{Cos. (B} + \text{C} + CDA)}$$

$$= \frac{310{,}261}{\text{Cos. } 304^\circ\ 33'\ 26''} \text{ (Nro. 3.)}$$

$$= \frac{310{,}261}{\text{Cos. } 55^\circ\ 26'\ 34''};$$

Log. $310{,}261 = 2{,}4917272,$
Log. Cos. $55^\circ\ 26'\ 34'' = 9.7537586 - 10,$

also Log. AD $= 2{,}7379686.$

6) Im zweiten Vierecke AF sind jetzt die drei Seiten f, g und AD, und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel G und DAG bekannt, deßwegen ist der Flächeninhalt dieses Viereckes (§. 85. Nro. 6.), oder

Tetrag. AF $= \frac{1}{2}g \cdot AD \cdot \text{Sin. } DAG + \frac{1}{2}g \cdot f \cdot \text{Sin. } G - \frac{1}{2}f \cdot AD \cdot \text{Sin. } (DAG + G)$.

Nun ist

Log. $\frac{1}{2}g = 2{,}4395687$,
Log. AD $= 2{,}7379686$,
Log. Sin. $DAG = 9{,}9599630 - 10$,
$= 5{,}1375003$
$=$ Log. 137246,2;

ferner

Log. $\frac{1}{2}g = 2{,}4395687$,
Log. f $= 2{,}7906538$,
Log. Sin. G $= 9{,}9652480 - 10$,
$= 5{,}1954705$
$=$ Log. 156845;

und

Log. $\frac{1}{2}f = 2{,}4896238$,
Log. $AD = 2{,}7379686$,
Log. Sin. $(DAG + G) = 8{,}4484941 - 10$,
$= 3{,}6760865$
$=$ Log. 4743,36;

es ist jetzt

$\frac{1}{2}g \cdot AD \cdot \text{Sin. } DAG = 137246{,}2$,
$+ \frac{1}{2}g \cdot f \cdot \text{Sin. } G = 156845$,
$= 294091{,}2$
$-\frac{1}{2}f \cdot AD \cdot \text{Sin. } (DAG + G) = -4743{,}36$
also Tetrag. $AF = 289347{,}84$.

7) Weil zur Bestimmung des Flächeninhaltes dieses Vieleckes nur mehr der Flächeninhalt des Dreieckes DEF zu berechnen ist, und bei diesem die zwei Seiten d und e mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel E bekannt sind, so ist im Vierecke AF die Berechnung der Winkel ADF und DFG, und der Diagonallinie DF nicht mehr nöthig, und man sucht gleich unmittelbar aus den Seiten d und e, und aus dem Winkel E den Flächeninhalt des Dreieckes DEF; es ist nach §. 85. Nro. 8.

$\triangle DEF = \frac{1}{2}de \cdot \text{Sin. } E = \frac{1}{2}e \cdot d \cdot \text{Sin. } E$.

Nun ist

Log. $\frac{1}{2}e = 2{,}3010300$,
Log. $d = 2{,}4885507$,
Log. Sin. $E = 9{,}9830223 - 10$,

also Log. $\triangle DEF = 4{,}7726030$
$=$ Log. 59238,35, und $\triangle DEF = 59238{,}35$.

8) Man bringe den bekannten Flächeninhalt der beiden Vierecke AC und AF, und des Dreieckes DEF in eine Summe, es gibt diese den gesuchten Flächeninhalt der ganzen Figur; nach Nro. 2., Nro. 6. und Nro. 7. ist

Tetrag. AC $= 188433{,}057$,
dann Tetrag. AF $= 289347{,}84$,
und $\triangle DEF = 59238{,}35$,

also Polyg. $ABCDEFG = 537019{,}247$.

Der Flächeninhalt dieses Siebeneckes ist daher in einem bestimmten Flächenmaaße $= 537019{,}247$.

Anmerkung: Man vergleiche mit dieser Auflösung die im §. 63. angeführte Auflösung, bei welcher der Flächeninhalt der nämlichen Figur aus allen bekannten Seiten und Winkeln durch die Abtheilung derselben in Dreiecke bestimmt, und ein Resultat gefunden wurde, das von dem gegenwärtigen wenig abweicht. Man hat dadurch für die frühere Flächenberechnung dieses Vieleckes eine neue Probe (§. 60. Anmerk. 1.), und ich werde aus diesem Grunde auch in der Folge bei der nämlichen Aufgabe öfters dieselben unbekannten Stücke nach mehreren Lehrsätzen nnd Auflösungen bestimmen.

§. 87.

II. Aufgabe, den Flächeninhalt einer geradlinigten ebenen Figur zu finden, wenn alle ihre Seiten und Winkel bekannt sind, und dieselbe durch Perpendikel in Trapezen getheilt wird.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 4.) der Flächeninhalt des Sechseckes $ABCDEF$ zu finden, und es seien alle Seiten und Winkel desselben bekannt.

2) Man nehme eine Polygonsseite, etwa AF oder f als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, und errichte auf dieselbe, oder auf ihre Verlängerung von allen Ecken der Figur Perpendickel oder rechtwinklichte Ordinaten, es wird dadurch die Figur in die Trapezen mC, n*D* und oE, und am Anfange und am Ende in die Dreiecke mBA und EpF getheilt.

3) Nach §. 4. berechne man die bei diesen Trapezen vorkommenden Abszissen und Ordinaten, und bestimme daraus, da dann allemal bei diesen einzelnen Trapezen drei Seiten mit den beiden eingeschlossenen Winkeln bekannt sind, und die Dreiecke am Anfange, und am Ende der Figur als Trapezen betrachtet werden, bei welchen die eine Parallele = 0 ist, nach dem III. Zusatze des §. 79. den Flächeninhalt (§. 17.); es ist

$\triangle$ B*A*m = ½Bm . Am, und 2$\triangle$ B*A*m = Bm . *A*m,
dann 2 Trap. mC = (Bm + Cn) × mn,
ferner 2 Trap. n*D* = (Cn + Do) × no,
überdieß 2 Trap. oE = (*D*o + Ep) × op,
endlich 2$\triangle$ EpF = Ep . pF.

4) Weil das Dreieck mBA nicht zum Flächeninhalte der ganzen Figur gehört, und vom Trapeze m*C* abzuziehen ist, so setze man es bei der Summirung der einzelnen Figuren mit dem Zeichen —, und bringe dann, um den Flächeninhalt der ganzen Figur zu erhalten, alle Trapezen und Dreiecke in eine Summe; es ist der Flächeninhalt dieses Sechseckes, oder

Polyg. ABCDEF = ½(— 2$\triangle$ BAm + 2 Trap. mC
+ 2 Trap. nD + 2 Trap. oE + 2$\triangle$ EpF)
= ½(Bm × — *A*m) + (Bm + Cn) × mn
+ (Cn + Do) × no + (*D*o + Ep) × op
+ Ep . pF).

Anmerkung: Es ist auch bei der Auflösung dieser Aufgabe durch die Zertheilung der Figur bequemer, wenn man, anstatt jeden einzelnen Theil, am Ende die ganze Summe mit 2 dividirt, und vor der Hand bei der Berechnung den doppelten Flächeninhalt der Figuren setzt (§. 60. Anmerk. 2., und I. §. 158. Auflös. III.).

§. 88.

Beispiel zur Aufgabe des vorigen §.

Man soll (*Fig.* 4.) den Flächeninhalt des Sechseckes ABCDEF berechnen, wenn es durch rechtwinklichte Ordinaten in Trapezen getheilt wird, und die Seiten und Winkel, welche sämmtlich bekannt sind, folgende Größe haben:

Die gegebenen Seiten:

a = 114,
b = 98,5,
c = 55,
d = 89,
e = 100,85,
f = 154;

Die gegebenen Winkel:

A = 112° 16',
B = 107° 7',
C = 148° 21',
D = 112° 22',
E = 162° 30',
F = 77° 24'.

Auflösung:

1) Man verlängere am Anfangspunkte A die angenommene Abszissenlinie AF, und ziehe von den Ecken B, C, D und E die rechtwinklichten Ordinaten, oder, wie man kürzer sagt (§. 3. Anmerk. 5.), die Ordinaten Bm, Cn, *D*o und Ep (I. §. 33.), es wird dadurch das Sechseck in die Dreiecke B*A*m und EpF, und in die Trapezen mC, n*D* und oE getheilt.

2) Man berechne nach §. 4. alle Abzissen und Ordinaten, nehme bei den ersteren die gehörigen Differenzen (§. 17.), und bestimme dann den doppelten Flächeninhalt aller einzelnen Figuren. Es ist nach §. 11. Auflös. II. rücksichtlich der jedesmal bezeichneten Nummern

$$2\triangle BAm = Bm \cdot Am$$
$$= 105{,}5 \times 43 = 4557{,}6 \text{ (Nro. 1.), indem}$$
$$\text{Log. } 105{,}5 = 2{,}0232525,$$
$$\text{und Log. } 43{,}2 = 1{,}6354837,$$
$$\text{also Log. } 2\triangle BAm = 3{,}6587362$$
$$= \text{Log. } 4557{,}6, \text{ und } 2\triangle BAm = 4557{,}6;$$

dann ist

$$2 \text{ Trap. } mC = (Bm + Cn) \times mn \text{ (Nro. 2.)}$$
$$= (105{,}5 + 168) \times 76{,}1 = 273{,}5 \times 76{,}1 = 20813{,}35, \text{ da}$$

Log. 273,5 = 2,4369573,
und Log. 76,1 = 1,8813847,

also Log. 2 Trap. mC = 4,3183420
= Log. 20813,35, und 2 Trap. mC = 20813,35;

ferner ist

2 Trap. nD = (Cn + Do) × no (Nro. 3.)
= (168 + 175,4) × 54,5 = 343,4 × 54,5 = 18715,3, weil

Log. 343,4 = 2,5358003,
und Log. 54,5 = 1,7363965,

also Log. 2 Trap. nD = 4,2721968
= Log. 18715,3, und 2 Trap. nD = 18715,3;

überdieß ist

2 Trap. oE = (Do + Ep) × op (Nro. 4.)
= (175,4 + 98,4) × 44,6 = 273,8 × 44,6 = 12211,5,

indem Log. 373,8 = 2,4374334,
und Log. 44,6 = 1,6493349,

also Log. 2 Trap. oE = 4,0867683
= Log. 12211,48, und 2 Trap. oE = 12211,48;

endlich ist

△EpF = Ep × pF = 98,4 × 22 (Nro. 5.) = 2164,8, da

Log. 98,4 = 1,9929951,
und Log. 22 = 1,3424227,

also Log. 2△ EpF = 3,3354178
= Log. 2164,8, und 2△ EpF = 2164,8.

3) Man bringe diese fünf Produkte in eine Summe, setze dabei aus dem angeführten Grunde das erste Produkt negativ, und halbire die gefundene Summe, man erhält dadurch den verlangten Flächeninhalt der ganzen Figur.

Es ist der vorstehenden Berechnung zur Folge

— 2△ BAm = + ... — 4557,6
+ 2 Trap. mC = + 20813,35
+ 2 Trap. nD = + 18715,3
+ 2 Trap. oE = + 12211,48
+ 2△ EpF = + 2164,8

also 2 Pol. ABCDEF = + 53904,95 — 4557,6
= 49347,33, und Polyg. ABCDEF = 49347,33 : 2
= 24673,665.

Der Flächeninhalt dieses Sechseckes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße = 24673,665.

Anmerkung: 1) Man vergleiche diese Auflösung mit der im §. 61. angeführten Auflösung der nämlichen Aufgabe, wo der Flächeninhalt dieses Sechseckes durch dessen Vertheilung in Dreiecke aus allen bekannten Seiten und Winkeln bestimmt wurde.

2) Auf die nämliche Weise, wie es bei der vorstehenden Auflösung geschehen ist, verfahre man, wenn man nach §. 12 und 13. den Flächeninhalt des angeführten Sechseckes, und des Zeheneckes dadurch aus allen bekannten Seiten und Winkeln finden will, daß man diese Vielecke mittels einer als Basis angenommenen Seite durch Perpendikel in Trapezen theilet, dann nach §. 4. die Abszissen und Ordinaten berechnet, und hierauf aus diesen den Flächeninhalt der einzelnen Figuren bestimmt (§. 17. Anmerk. 1.).

3) Die Bestimmung des Flächeninhaltes einer geradlinigten ebenen Figur aus den vorhin berechneten Abszissen und Ordinaten kann bequemer und sicherer in einer tabellarischen Form, etwa in fünf Spalten, geschehen. Man schreibt nämlich der Ordnung nach in die erste Spalte die Benennungen der einzelnen Figuren, in die zweite die Ordinaten, in die dritte ihre Summen, in die vierte die Differenzen der Abszissen oder die Höhen der Dreiecke und der Trapezen, und in die fünfte oder letzte Spalte die erhaltenen Produkte, mit der beigefügten Bemerkung durch das betreffende Zeichen, ob sie positiv oder negativ sind.

§. 89.

III. Aufgabe, den Flächeninhalt einer geradlinigten ebenen Figur zu finden, wenn alle ihre Seiten und Winkel bekannt sind, und dieselbe durch Parallellinien mittels eines bestimmten, oder beliebig zur Grundlinie angenommenen Winkels in Trapezen getheilt wird.

Auflösung:

1) Es seien (Fig. 37.) im Siebenecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel bekannt, und man soll den Flächeninhalt desselben dadurch berechnen, daß man

unter einem bestimmten, oder zur gewählten Basis beliebig angenommenen Winkel von allen Ecken aus bis zur gegenüber stehenden Grenze Parallellinien zieht.

2) Man ziehe vom Ecke A unter dem bekannten Winkel MAG die gerade Linie AM, und mit dieser Linie von den Ecken C, D, E und G die Parallelen CN, DO, EP und GP (I. §. 39.).

3) Weil der Winkel M*A*G zum Voraus gegeben ist, oder beliebig angenommen wird, und der Winkel B*A*M = BAG — M*A*G = A — MAG, so sind im Dreiecke ABM nebst der Seite AB oder a die beiden ihr anliegenden Winkel B und BAM bekannt, und daraus kann man sowohl den dritten Winkel BMA, und den Flächeninhalt, als auch die beiden übrigen Seiten BM und AM finden; es ist nach §. 52, und nach §. 52. Zus. II.

$$BMA = 180^\circ - (B + BAM) \text{ (I. §. 43.)},$$

$$\text{dann } \triangle ABM = \frac{a^2 \,.\, Sin.\ B \,.\, Sin.\ BAM}{2 \,.\, Sin.\ (B + BAM)},$$

$$\text{ferner } BM = \sqrt{\left(\frac{2\triangle ABM \,.\, Sin.\ (B + BMA)}{Sin.\ B \,.\, Sin.\ BMA}\right)},$$

$$\text{und } AM = \sqrt{\left(\frac{2\triangle ABM \,.\, Sin.\ (BAM + BMA)}{Sin.\ BAM \,.\, Sin.\ BMA}\right)}.$$

4) Durch die Seite BC oder b, und durch BM ist die Seite MC bestimmt, dann durch den Winkel BM*A* ist sein Nebenwinkel *A*MC, und durch diesen der Winkel MCN, wie auch durch den Winkel M*A*N der Winkel *A*NC gegeben; es ist MC = b — BM, *A*MC = 180° — BM*A* (I. §. 11. Zus. III.), MCN = 180° — *A*MC (I. §. 41.), und *A*NC = 180° — M*A*N.

5) Im Trapeze AC sind nebst den zwei auf einander folgenden Seiten CM und M*A* alle vier Winkel bekannt; deßwegen ist nach dem III. Zusatze des §. 73., wenn man die Linie CM als die erste, und M*A* als die zweite bekannte Seite annimmt, der Flächeninhalt dieses Trapezes, oder

$$\text{Trap. AC} = \text{CM} \cdot \text{MA} \cdot \text{Sin. MCN} + \frac{\text{CM}^2 \cdot \text{Sin. MCN} \cdot \text{Sin. (MCN + ANC)}}{2 \cdot \text{Sin. ANC}}.$$

6) Man bestimme im Trapeze AC für die Abszissenlinie AN und den Anfangspunkt A nach §. 4. bei dem letzten Ecke N die Ordinate, um die Parallele CN zu finden; es ist

$$\text{AM} \cdot \text{Sin. MAN} - \text{MC} \cdot \text{Sin. (MAN + AMC)} + \text{CN} \cdot \text{Sin. (MAN + AMC + MCN)} = 0, \text{ also}$$

$$CN = \frac{MC \cdot \text{Sin. (MAN + AMC)} - \text{AM} \cdot \text{Sin. MAN}}{\text{Sin. (MAN + AMC + MCN)}}.$$

7) Man bestimme im Trapeze AC die noch unbekannte Seite AN, es ist nach dem IV. Zusatze des §. 77. diese, oder

$$\text{AN} = \frac{2 \text{ Trapez. } AC}{(\text{CN} + AM) \cdot \text{Sin. } ANC}.$$

8) Im folgenden Trapeze ND weiß man die Seiten DC und CN, und die Winkel NCD, dann CDO, und NOD, weil $NCD = C - \text{MCN}$, dann CDO $= 180° - \text{NCD}$, und $CNO = MAN$ bekannt sind (I. §. 41.); man kann daher nach Nro. 5. den Flächeninhalt, und nach Nro. 6 und 7. die beiden unbekannten Seiten NO und OD berechnen.

9) Auf die nämliche Weise findet man bei den übrigen Trapezen die unbekannten Stücke.

10) Im letzten Dreiecke EFQ findet man durch die vorausgehenden Auflösungen die Seiten EQ und QF nebst den beiden Winkeln QEF und EQF, und der Winkel F mit der Seite EF ist zum Voraus gegeben; dadurch sind alle Seiten und Winkel bekannt, und man findet den Flächeninhalt nach den im ersten Abschnitte dieses Hauptstückes aufgestellten Lehrsätzen. Es ist aber nicht nothwendig, daß man bei diesem letzten Dreiecke alle Seiten und Winkel weiß, und es genügt, wenn man nebst der gegebenen Seite EF oder e, und dem bekannten Polygonswinkel F noch einen Winkel, etwa QEF weiß, es ist dann nach §. 52. der Flächeninhalt dieses Dreieckes, oder

$$\triangle QEF = \frac{e^2 \,.\, \text{Sin. F} \,.\, \text{Sin. QEF}}{2 \,.\, \text{Sin.}(F + QEF)}.$$

11) Wenn man den Flächeninhalt des Dreieckes ABM, und des Trapezes AC nach Nro. 3 und 5., und im Trapeze AC die Seiten CN und AN nach Nro. 6 und 7., oder auch nur CN nach Nro. 6. gefunden hat, so kann man gleich den Flächeninhalt des Trapezes ND finden; es ist dieser nach dem III. Zusatze des §. 73., oder

$$\text{Trapez. N}D = DC \,.\, CN \,.\, \text{Sin. ODC} + \frac{DC^2 \,.\, \text{Sin. O}DC \,.\, \text{Sin.}(ODC + NOD)}{2 \,.\, \text{Sin. NOD}}.$$

12) Man beginne jetzt die Flächenberechnung beim Dreiecke EFQ, es ist, da der Winkel $EQF = PGQ = G - OGP$, dann $OGP = ANC$ (Nro. 4.), und $QEF = 180° - (F + EQF)$.

Uiberdieß ist nach §. 52., und nach dem II. Zusatze des §. 52.

$$\triangle EFQ = \frac{e^2 \,.\, \text{Sin. F} \,.\, \text{Sin. QEF}}{2 \,.\, \text{Sin.}(F + QEF)}, \text{ dann}$$

$$EQ = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \,.\, \text{Sin.}(QEF + EQF)}{\text{Sin. QEF} \,.\, \text{Sin. EQF}}\right)}, \text{ und}$$

$$QF = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \,.\, \text{Sin.}(F + EQF)}{\text{Sin. F} \,.\, \text{Sin. EQF.}}\right)}.$$

13) Die Seite GQ ist $= f - FQ$, und deßhalb beim Trapeze GE nach dem III. Zusatze des §. 73. und nach §. 4., wie auch nach dem IV. Zusatze des §. 77., da die Winkel PGQ und GPE auf die angezeigte Weise gefunden werden können,

$$\text{Trapez. GE} = GQ \,.\, QE \,.\, \text{Sin. PGQ} + \frac{GQ^2 \,.\, \text{Sin. PGQ} \,.\, \text{Sin.}(PGQ + GPE)}{2 \,.\, \text{Sin. GPE}},$$

$$\text{dann } GP = \frac{GQ \,.\, \text{Sin.}(PEQ + EQG) - \text{Sin. PEQ}}{\text{Sin.}(PEQ + EQG + QGP},$$

$$\text{und } PE = \frac{2 \text{ Trapez. GE}}{(EQ + PG) \,.\, \text{Sin. PEQ}'}$$

wie auch $DP = DE - PE = d \,.\, PE.$

14) Im Trapeze OP bestimme man die Winkel ODP und DOG, und berechne aus diesen, und aus den Seiten DP und PG den Flächeninhalt desselben; es ist, wenn man DP als die erste Seite, und den Winkel ODP als den ersten Winkel annimmt (§. 73. Zus. III.),

$$\text{Trapez. OP} = \text{DP} \,.\, \text{PG} \,.\, \text{Sin. ODP} + \frac{\text{DP}^2 \,.\, \text{Sin. ODP} \,.\, \text{Sin. (ODP} + \text{DOG)}}{2 \,.\, \text{Sin. DOG}}.$$

15) Weil jetzt die beiden Dreiecke, und die vier Trapezen berechnet sind, so bringe man wieder diese sechs einzelnen Figuren in eine Summe, um den Flächeninhalt des ganzen Siebeneckes ABCDEFG zu erhalten.

Anmerkung: 1) Da (Fig. 37.) im letzten Trapeze GE die Winkel GPE + PEQ = 180°, und der Dreieckswinkel QEF = DEF — PEQ = E — PEQ, so ist es bei diesem Trapeze für die Flächenbestimmung des letzten Dreieckes QEF nach Nro. 9. der vorstehenden Auflösung nicht nöthig, daß auch noch die Seiten EQ und QG berechnet werden.

2) Wenn das Dreieck oder Trapez zum Voraus genannt ist, so kann man bei den Formeln, durch welche ihre unbekannten Stücke gefunden werden, der Kürze wegen die Winkel auch mit einem Buchstaben bezeichnen, so daß (Fig. 37.) z. B. der Winkel BMA = M, dann ANC = N ꝛc. gesetzt wird; nur sollte dieses bei den Winkeln an den Ecken des Vieleckes nicht geschehen, weil es da festgesetzt ist, daß die einzelnen Buchstaben A, B, C ꝛc. die Polygonswinkel BAG, ABC, BCD ꝛc. bezeichnen (§. 3. Zus. V.). In dem anderen Falle wäre es bei der Angabe des Sinus kein Fehler, wenn man z. B. den Winkel BMA anstatt AMC, oder ANC anstatt CNO nehmen würde, weil BMA + AMC = 180°, und ANC + CNO = 180° (I. §. 11. Zus. III.), und deßhalb Sin. AMC = Sin. BMA, und Sin. CNO = Sin. ANC (II. §. 62. Zus. III.).

§. 90.

Beispiel zur Aufgabe des vorigen §.

Man soll (Fig. 37.) den Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG berechnen, wenn es durch Paral-

len mittels eines bestimmten, oder beliebig zur Basis AG angenommenen Winkels in Trapezen getheilt wird, und die Seiten und Winkel, welche sämmtlich bekannt sind, folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten.
$$\begin{cases} a = 531, \\ b = 361, \\ c = 383, \\ d = 308, \\ e = 400, \\ f = 617{,}524, \\ g = 550{,}299; \end{cases}$$

Die bekannten Winkel.
$$\begin{cases} A = 121^\circ\ 13', \\ B = 113^\circ\ 23', \\ C = 84^\circ\ 44', \\ D = 270^\circ\ 31', \\ E = 105^\circ\ 55', \\ F = 91^\circ\ 37', \\ G = 112^\circ\ 37'. \end{cases}$$

Auflösung:

1) Man ziehe vom Anfangspunkte A aus zur angenommenen Basis AG unter dem gegebenen oder beliebig gewählten Winkel $MAG = 100^\circ\ 30'$ zur Seite BC die gerade Linie AM, und mit dieser von den Ecken C, D, E und G allemal bis zur gegenüber stehenden Grenze der Figur die Parallellinien CN, DO, EQ und GP (I. §. 39.), es wird dadurch das Vieleck am Anfange, und am Ende in die Dreiecke ABM und EFQ, und zwischen diesen in die Trapezen AC, ND, OP und GE getheilt.

2) Im ersten Dreiecke weiß man die Seite AB, und, da der Winkel $BAM = BAG - MAG = A - MAG$, die beiden ihr anliegenden Winkel B und BAM, deßwegen ist der dritte Winkel $BMA = 180^\circ - (B + BAM)$, dann $AMC = 180^\circ - BMA$, ferner $MCN = BMA$, und $ANC = 180^\circ - MAN$ (§. 89. Nro. 3 und 4.).

Nun ist

$BAG = A = 121^\circ\ 13'$,
und $MAG = 100^\circ\ 30'$,
also $BAM = 20^\circ\ 43'$;

dann $180^\circ = 179^\circ\ 60'$,
und $(B + BAM) = 134^\circ\ 6'$,
also $BMA = 45^\circ\ 54'$, und $MCN = 45^\circ\ 54'$;

ferner $180° = 179° 60'$,
und $BMA = 45° 54'$,
also $AMC = 134° 6'$;

endlich $180° = 179° 60'$,
und $MAG = MAN = 100° 30'$,
also $ANC = 79° 30'$.

3) Wegen der gegebenen Seite AB oder a, und den beiden bekannten, ihr anliegenden Winkel B und BAM ist nach §. 89. Nro. 3.

$$\triangle ABM = \frac{a^2 \,.\, \text{Sin. B} \,.\, \text{Sin. BAM}}{2 \,.\, \text{Sin. (B} + \text{BAM)}}.$$

Nun ist

Log. $a^2 = 5{,}4501890$,	Log. $2 = 0{,}3010300$,
L. Sin. $B = 9{,}9627812 - 10$,	L. S. $(B + BAM) = 9{,}8562008 - 10$,
L. S. $BAM = 9{,}5486927 - 10$,	$= 0{,}1572308$;
$= 4{,}9616629$;	

dann $+ 4{,}9616629$,
und $+ 0{,}1572308$,
also Log. $\triangle BAM = 4{,}8044321$
$=$ Log. 63742,94, und $\triangle BAM = 63742{,}94$.

4) Da jetzt nebst der Seite a, und allen drei Winkeln des Dreieckes ABM auch dessen Flächeninhalt bekannt ist, so ist nach §. 89. Nro. 3.

$$BM = \sqrt{\left(\frac{2\triangle BAM \,.\, \text{Sin. (B} + \text{BM}A)}{\text{Sin. B} \,.\, \text{Sin. M}}\right)},$$

$$\text{und } AM = \sqrt{\left(\frac{2\triangle BAM \,.\, \text{Sin. (BA M} + \text{M)}}{\text{Sin. BA M} \,.\, \text{Sin. M}}\right)}.$$

Nun ist

Log. $2 = 0{,}3010300$,	Log. Sin. $B = 9{,}9627812 - 10$,
L. $\triangle$ BAM $= 4{,}8044321$,	Log. Sin. $M = 9{,}8562008 - 10$,
L. S. $(B + M) = 9{,}5486927 - 10$,	$= 0{,}8189820 - 1$,
$= 4{,}6541548$,	
$= 0{,}8189820 - 1$,	

also L. $BM^2 = 4{,}8351728$,
und Log. $BM = 2{,}4175864 =$ Log. 261,5691,
weßhalb $BM = 261{,}5691$.

Ferner ist

Log. 2 = 0,3010300,
Log. △ BAM = 4,8044321,
L. S. (BAM + M) = 9,9627812 — 10,
= 5,0682433,
0,4048935 — 1,

L. S. BAM = 9,5486927 — 10,
L. Sin. M = 9,8562008 — 10,
= 0,4048935 — 1,

also Log. AM^2 = 5,6633498, und Log. AM = 2,8316749,
weßhalb AM = 678,6953.

3) Im Trapeze *AC* sind nach Nro. 2. alle vier Winkel, und die beiden unmittelbar auf einander folgenden Seiten CM und M*A* bekannt, weil CM = BC — BM = b — BM = 361 — 261,5691 = 99,4309; nach §. 89. Nro. 5. ist der Flächeninhalt dieses Trapezes, oder

$$\text{Trap. } AC = CM \cdot MA \cdot \text{Sin. MCN} + \frac{CM^2 \cdot \text{Sin. MCN} \cdot \text{Sin. (MCN} + ANC)}{2 \cdot \text{Sin. } ANC}.$$

Nun ist

Log. CM = 1,9975214,
Log. M*A* = 2,8316749,
Log. Sin. MCN = 9,8562008 — 10,
= 4,6853971
= Log. 48461,52,

dann

Log. CM^2 = 3,9950428,
Log. Sin. MCN = 9,8562008 — 10,
Log. Sin. (M*C*N + *A*N*C*) = 9,9112257 — 10,
= 3,7624693,

und

Log. (2 . Sin. N) = 0,2936961,
= 3,4687732
= Log. 2942,885; + 2942,885,
+ 48461,52,

also Trap. *AC* = 51404,405.

6) Man berechne im Trapeze *AC* für die Flächenbestimmung der folgenden Trapezen die Seiten CN und *A*N; es ist nach §. 89. Nro. 6 und 7.

$$CN = \frac{MC \,.\, \text{Sin.}(MAN + AMC) - AM \,.\, \text{Sin.}\, MAN}{\text{Sin.}\,(MAN + AMC + MCN)},$$

$$\text{und } AN = \frac{2 \text{ Trap. } AC}{(CN + AM) \,.\, \text{Sin.}\, ANC}.$$

Nun ist Log. MC = 1,9975214,
Log. $(MAN + AMC)$ = 9,9112257 — 10,
= 1,9087471
= Log. 81,0489;
Log. AM = 2,8316749,
Log. MAN = 9,9926661 — 10,
= 2,8243410
= Log. 667,33, folglich, da der Sinus von $MAN + AMC$, und von der Summe $MAN + AMC + MCN$ negativ ist (II. §. 66.),

$MC \,.\, \text{Sin.}(MAN + AMC)$ = — 81,0489,
und $— AM \,.\, \text{Sin.}\, MAN$ = — 667,33,
= — 748,3789.

mithin ist $CN = \frac{-748{,}3789}{-\text{Sin. } 280^\circ\ 30'} = \frac{748{,}3789}{\text{Sin. } 79^\circ\ 30'}$ (II. §. 65.);

Log. 748,3789 = 2,8741215,
Log. Sin. 79° 30′ = 9,9926661 — 10,
also Log. CN = 2,8814554
= Log. 761,124, und CN = 761,124.

Ferner ist Log. (2 . Trap. AC) = 5,0120303,
und Log. $((CN + AM) \times \text{Sin. } ANC)$ = 3,1509741,
also Log. AN = 1,8610562
= Log. 72,62, und AN = 72,62.

7) Im folgenden Trapeze ND weiß man die Seiten DC und CN, und alle Winkel, indem DC = c = 383, und CN = 761,124 (Nro. 6.), und überdieß der Winkel $NCD = BCD - MCN = C - MCN$ = 84° 44′ — 45° 54′ = 38° 50′, dann CDO = 180° — NCD = 180° — 38° 50′ = 141° 10′ (I. §. 41.), ferner $DON = CNA$ = 79° 30′ (I. §. 41.), und $ONC = MAN$ = 100° 30′.

8) Im Trapeze ND berechne man aus den beiden bekannten, unmittelbar auf einander folgenden Seiten DC und CN, und aus den gefundenen Winkeln ODC und NOD den Flächeninhalt desselben, es ist nach dem III. Zusatze des §. 73.

$$\text{Trapez. } ND = CD \,.\, CN \,.\, \text{Sin. } ODC + \frac{DC^2 \,.\, \text{Sin. } ODC \,.\, \text{Sin. } (ODC + NOD)}{2 \,.\, \text{Sin. } NOD}$$

$= 182793{,}8 - 30480{,}9 = 152312{,}9.$

9) Man kann jetzt, da die drei ersten Theile des Vieleckes berechnet sind, und dieses durch die Parallelen in sechs Figuren getheilt ist, die weitere Berechnung der einzelnen Flächen bei dem letzten Dreiecke EQF anfangen, und man sucht alsdann im Trapeze ND die Seiten DO und NO nicht mehr, und es wäre in diesem Falle bei Nro. 6. die Bestimmung der Seite AN auch nicht nöthig gewesen.

10) Im Dreiecke EFQ weiß man die Seite EF oder e, und die Winkel QEF und EQF können aus den vorausgehenden, bekannten Winkeln gefunden werden. Es ist $DOG = MAN = 100° 30'$, dann $OGP = 180° - 100° 30' = 79° 30'$, ferner $PGQ = EQF = G - PGO = 112° 37' - 79° 30' = 33° 7'$, und daher der dritte Dreieckswinkel $QEF = 180° - (F + EQF) = 55° 16'$.

11) Im Dreiecke EFQ ist nach §. 52. dessen Flächeninhalt, oder

$$\triangle EFQ = \frac{e^2 \,.\, \text{Sin. } F \,.\, \text{Sin. } QEF}{2 \,.\, \text{Sin. } (F + QEF)}.$$

Nun ist

Log. e^2	$= 5{,}2041200,$		
Log. Sin. F	$= 9{,}9998271 - 10,$	Log. 2	$= 0{,}3010300,$
L. Sin. QEF	$= 9{,}9147729 - 10,$	L. S. (F + QEF)	$= 9{,}7374675 - 10,$
	$= 5{,}1187200;$		$= 0{,}0384975;$

$$+ 5{,}1187200,$$
$$- 0{,}0384975,$$

also Log. $\triangle$ EFQ $= 5{,}0802225$
$=$ Log. 120288, und $\triangle$ EFQ $= 120288.$

12) Wegen des jetzt bekannten Flächeninhaltes, und aller bekannten Winkel des Dreieckes EFQ ist nach dem 11. Zusatze des §. 52.

$$EQ = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \,.\, \text{Sin.}\,(QEF + EQF)}{\text{Sin. QEF} \,.\, \text{Sin. EQF}}\right)}, \text{ und}$$

$$QF = \sqrt{\left(\frac{2\triangle \,.\, \text{Sin.}\,(F + EQF)}{\text{Sin. F} \,.\, \text{Sin. EQF}}\right)}.$$

Nun ist

Log. $(2\triangle \,.\, EFQ) = 5{,}3812525$,
Log. Sin. $(QEF + EQF) = 9{,}9998271 - 10$,
$= 5{,}3810796$;
dann Log. $(\text{Sin.QEF} \,.\, \text{Sin.EQF}) = 0{,}6522404 - 1$,
also Log. $EQ^2 = 5{,}7288392$,
und Log. $EQ = 2{,}8644196 =$ Log. $731{,}846$, weßhalb
$EQ = 731{,}846$.

Ferner ist

Log. $(2 \,.\, \triangle EFG) = 5{,}3812525$,
Log. Sin. $(F + EQF) = 9{,}9147729 - 10$,
$= 5{,}2960254$,
Log. $(\text{Sin. F} \,.\, \text{Sin. EQF}) = 0{,}7372946 - 1$,
also Log. $QF^2 = 5{,}5587308$,
und Log. $QF = 2{,}7793654 =$ Log. $601{,}68$, weßhalb
$QF = 601{,}68$.

13) Durch die Seite FG oder f, und durch die Linie QF ist die Seite GQ bestimmt; es ist diese, oder $GQ = GF - QF = f - QF = 617{,}524 - 601{,}68 = 15{,}844$.

14) Im Trapeze GE können aus den schon bekannten Winkeln alle vier Winkel bestimmt werden, indem $PEQ = E - QEF = 50^\circ\ 39'$, dann $GPE = 180^\circ - PEQ = 129^\circ\ 21'$, ferner nach Nro. 10. ist der Winkel $PGQ = 33^\circ\ 7'$, und $GQE = 146^\circ\ 53'$.

Weil überdieß in diesem Trapeze die Seiten GQ und QE betannt sind, so ist nach §. 90. Nro. 13. dessen Flächeninhalt, oder

$$\text{Trapez. GE} = GQ \,.\, QE \,.\, \text{Sin. PGQ} + \frac{GQ^2 \,.\, \text{Sin. PGQ} \,.\, \text{Sin.}\,(PGQ + GPE)}{2 \,.\, \text{Sin. GPE}}.$$

Nun ist Log. GQ = 1,1998648,
Log. QE = 2,8644196,
Log. Sin. PGQ = 9,7374675 — 10,

= 3,8017519 = Log.6335,08;

dann Log. GQ^2 = 2,3997296,
Log. Sin. PGQ = 9,7374675 — 10,
L. Sin. (PGQ + GPE) = 9,4789423 — 10,

= 1,6161394,
Log. (2 . Sin. GPE) = 0,1893708,

= 1,4267686 = Log. 26,715;

+ 6335,08
+ 26,715,

folglich ist Trapez. GE = 6361,795.

15) Man suche im Trapeze GE für die Flächenbestimmung des Trapezes OP die Seiten PG und PE, es ist nach §. 89. Nro. 13.

$$GP = \frac{GQ \,.\, \text{Sin.}(PEQ + EQG) - EQ \,.\, \text{Sin.}\, PEQ}{\text{Sin.}\,(PEQ + EQG + QGP)}$$

= 738,019, dann

$$PE = \frac{2 \text{ Trapez. GE}}{(EQ + GP) \,.\, \text{Sin.}\, PEQ} = 11{,}1942,$$

und deßhalb $DP = DE - PE = d - PE = 308 - 11{,}1942 = 296{,}8058$.

16) Endlich berechne man, nachdem man vorhin auf die angezeigte Weise die Winkel ODP und DOG bestimmt hat, den Flächeninhalt des Trapezes OP, es ist dieser nach §. 89. Nro. 14., oder

$$\text{Trapez. OP} = DP \,.\, PG \,.\, \text{Sin. ODP} + \frac{DP^2 \,.\, \text{Sin. ODP} \,.\, \text{Sin.}\,(ODP + DOG)}{2 \,.\, \text{Sin. DOG}}$$

= 169387,2 — 26478,05 = 142909,15.

17) Man bringe die beiden Dreiecke, und die vier Trapezen in eine Summe, um den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes zu finden; es ist nach der vorstehenden Berechnung

$\triangle$ BAM = 63742,94 (Nro. 3.)
+ Trapez. AC = 51404,405 (Nro. 5.)
+ Trapez. ND = 152312,9 (Nro. 8.)
+ Trapez. OP = 142909,15 (Nro. 16.)
+ Trapez. GE = 6361,795 (Nro. 14.)
+ $\triangle$ EFQ = 120288, (Nro. 11.),

also Polyg. ABCDEFG = 537019,19

Der Flächeninhalt dieses Siebeneckes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße = 537019,19.

Anmerkung: 1) Die Berechnung ist einfacher, wenn man, wie es bei dieser Auflösung geschehen ist, die eine Hälfte der einzelnen Figuren von dem Dreiecke BAM, und die andere von dem Dreiecke EFQ aus berechnet.

2) Man vergleiche die vorstehende Auflösung mit den in den §§. 63 und 86. in Absicht auf dieses nämliche Siebeneck angeführten Berechnungen.

§. 91.

IV. Aufgabe, man soll (Fig. 38.) von einer Figur BCEFG, deren Seite BC nebst den beiden ihr anliegenden Winkeln B und C gegeben ist, ein Viereck von bestimmter Größe so abschneiden, daß dessen vierte Seite DA mit BG den gegebenen Winkel BAD oder A einschließet.

Auflösung:

1) Nach dieser Voraussetzung sind vom abzuschneidenden Vierecke BD nebst dem Flächeninhalte, und der Seite BC oder b die Winkel B, C und A bekannt, und deßwegen ist auch der vierte Winkel gegeben, da dieser oder CDA = D = 360° — (B + C + A) (1. §. 46.).

2) Wenn auch die erste Seite BA oder a bekannt ist, so kann man von ihrem Endspunkte A aus unter dem gegebenen Winkel BAD oder A, um das verlangte Viereck BD zu erhalten, die vierte Seite AD ziehen; deßwegen suche man den bekannten Stücken

gemäß nach dem III. Zusatze des §. 73. die Seite B*A*; es ist, indem die Winkel des gesuchten Viereckes mit den Buchstaben *A*, B, C und *D*, und der Ordnung nach die anliegenden Seiten mit a, b, c und d bezeichnet sind, BA, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} + \frac{2 \text{ Tetrag. Sin. } D - b^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Sin. } (C + D)}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + D)}\right)}.$$

3) Wenn die Summe der Winkel A + D kleiner ist, als zwei rechte Winkel oder 180°, und somit Sin. (A + *D*) positiv, und $-\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)}$ negativ wird, so muß man bei der Wurzelgröße, damit die gesuchte Seite a positiv wird, das Zeichen „+“ nehmen; ist aber die Summe der Winkel *A* + *D* größer, also 180°, und deßhalb Sin. (*A* + D) negativ (II. §. 66.), so wird $-\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)}$ positiv, und man nimmt das Zeichen „—“ bei der Wurzelgröße.

4) Die gefundene Seite a oder BA trage man vom Punkte B aus auf der Linie BG auf, und ziehe am Punkte A unter dem gegebenen Winkel BA*D* die Linie AD bis zur Linie CE (I. §. 25, und II. §. 143.), und man erhält das verlangte Viereck BD, welches auf die angezeigte Weise von dem Fünfecke BCEFG abgeschnitten wird (I. §. 47. a.).

Zusatz: Soll man (Fig. 41.) von dem Vierecke BE das Trapez B*D* vom gegebenen Inhalte, bei welchem die Seite BC oder b, und die ihr anliegenden Winkel FBC und B*C*E oder B und C bekannt sind, so abschneiden, daß die vierte Seite A*D* mit BC parallel läuft, so weiß man wieder vom abzuschneidenden Vierecke BD nebst dessen Flächeninhalte, und der Seite b alle vier Winkel, indem der Winkel A = 180° — B, und *D* = 180° — C (I. §. 41.). Man sucht deßwegen jetzt die Seite B*A* oder a, trägt dann diese vom Punkte B aus auf der Seite BF auf,

und zieht, um das verlangte Trapez von der gegebenen Figur abzuschneiden, vom Punkte A zur Seite CE mit BC die Parallellinie AD (I. §. 39., und II. § 148.).

Es ist nach §. 73. Zus. III., wenn man nach Nro. 3. des vorstehenden §. wegen des Zeichens der Wurzelgröße auf die Größe der Winkel A + D die geeignete Rücksicht nimmt, die gesuchte Seite BA, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. (A} + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. (A} + \text{D)}^2} + \frac{2 \text{ Trapez. B}D \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. (A} + D)}\right)}$$

, oder auch

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. (A} + D)} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. (}A + \text{D)}}\right)^2 + \frac{2 \text{ Trapez. Sin. C}}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. (A} + D)}\right)}$$

(Arithm. III. §. 71 und 72.).

Anmerkung: Zur bequemeren Anwendung der in den vorausgehenden Lehrsätzen angeführten Formeln habe ich in diesem Beispiele bei dem abzuschneidenden Vierecke der Ordnung nach für die Winkel die großen Buchstaben A, B, C und D, und für die Seiten die kleinen Buchstaben a, b, c und d gewählt, und dieses werde ich auch bei den folgenden Aufgaben öfters thun (§. 3. Zus. V.).

§. 92.

Beispiele zur Aufgabe des vorigen §.

I. Beispiel:

Man soll (Fig. 38.) vom Fünfecke BCEFG dessen Seite BC oder b = 155, und bei dem der eine, dieser Seite anliegende Winkel B = 95° 10′, und der andere C = 96° 30′, ein Viereck, dessen Größe in einem bestimmten Flächenmaaße = 3381,76, so abschneiden, daß dessen vierte Seite AD mit der Polygonsseite BG den Winkel BAD bildet, welcher = 114° 30′, so daß A = 114° 30′.

Auflösung:

1) Aus den drei gegebenen Winkeln A, B und C berechne man den vierten Viereckswinkel CDA, es ist dieser oder $D = 360° - (A + B + C) = 360° - 306° 10' = 53° 50'$.

2) Vom abzuschneidenden Vierecke BD sind jetzt nebst dem Flächeninhalte, und der Seite b auch die drei Winkel A, C und D bekannt, und die Summe der Winkel $A + D$ ist $= 168° 20'$, somit weniger als zwei rechte Winkel, deßwegen ist nach Nro. 2 und 3. des §. 91. die gesuchte Seite BA, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. } (A + D)} + \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} + \frac{2\,\text{Tetr.}BD \,.\, \text{Sin. D} - b^2 \,.\, \text{Sin. C} \,.\, \text{Sin.}(C + D)}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } (A + D)}\right)}.$$

3) Nach der bei dem II. Beispiele des §. 74. angeführten Auflösung ist

$$\sqrt{\left(\frac{2\,\text{Tetrag.}BD \,.\, \text{Sin.D} - b^2 \,.\, \text{Sin. C} \,.\, \text{Sin.}(C + D)}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. } (A + D)} + \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2}\right)} = \sqrt{(232827{,}3 + 579995)}$$

$$= \sqrt{812822{,}3} = + 901{,}5666, \text{ und}$$

$$- \frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin. } (A + D)} = - 761{,}576$$

weßhalb $a = + 139{,}9906$.

Die gesuchte Seite ist demnach $= 139{,}9906$, mithin beinahe $= 140$.

4) Man trage beim Fünfecke BCEFG von B aus die gefundene Seite BA oder $a = 140$ auf, und bilde am Punkte A in dieser Figur den gegebenen Winkel $BAD = 114° 30'$, man erhält, wenn man den zweiten Schenkel dieses Winkels bis zur Seite CE vergrößert, das verlangte Viereck BD oder BCDA, welches somit unter der gesetzten Bedingung von diesem Fünfecke abgeschnitten wird.

II. Beispiel:

Man soll (Fig. 41.) das Trapez BD, dessen Größe in einem bestimmten Flächenmaaße $= 20000$, so vom gegebenen Vierecke BE abschneiden, daß die Seite AD mit BC parallel läuft, und es sei beim abzuschneidenden Trapeze die Seite $b = 195$, dann der Winkel $B = 80° 7'$, und $C = 88° 2'$.

Auflösung:

1) Weil AD mit BC parallel sein soll, und die Winkel B und C bekannt sind, so ist der Winkel A $= 180° - B = 180° - 80° 7' = 99° 53'$, und D $= 180° - C = 180° - 88° 2' = 91° 58'$, weßhalb Sin. A $=$ Sin. $80° 7'$, dann Sin. $C =$ Sin. $88° 2'$, und Sin. $(A + D) = -$ Sin. $11° 51'$.

2) Vom abzuschneidenden Trapeze BD weiß man jetzt nebst dem Flächeninhalte, und der Seite b alle vier Winkel, deßwegen wird die Seite BA oder a, deren Größe zur Erlangung des verlangten Trapezes bekannt sein muß, nach der im Zusatze des §. 91. aufgestellten Formel gefunden.

3) Da überdieß die Summe der Winkel $A + D = 191° 51'$, somit $A + D > 2R$, so ist nach §. 91. Nro. 3., und nach dem diesem §. beigefügten Zusatze den hier gegebenen Stücken gemäß die gesuchte Seite BA, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin.}(A + D)} - \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. C}^2}{\text{Sin.}(A + D)^2} + \frac{2 \text{ Trapez. B}D \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin.}(A + D)}\right)}, \text{ oder auch}$$

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin.}(A + D)} - \sqrt{\left(\left(\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin.}(A + D)}\right)^2 + \frac{2 \text{ Trapez. Sin. C}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin.}(A + D)}\right)}.$$

4) Nun ist

$$\text{Log. (b . Sin. C)} = + 2{,}2897787,$$
$$\text{Log. Sin. (A} + D) = + 9{,}3124951 - 10,$$
$$= + 2{,}9772836$$

$= \text{Log. } 949{,}038;$

dann $\text{Log.}\left(\frac{\text{b . Sin. C}}{\text{Sin. (A} + \text{D)}}\right) \times 2 = 2{,}9772836 \times 2$
$= 5{,}9545672 = \text{Log. } 900673;$

$$\text{Log. (2 . Trapez. Sin. C)} = + 4{,}6018041,$$
$$\text{Log. (Sin. A . Sin. (A} + \text{D))} = + 0{,}3060016 - 1,$$
$$= + 5{,}2958025$$

$= \text{Log. } 197607{,}1$, und $+ 900673 - 197607{,}1$
$= 703065{,}9.$

Die gesuchte Seite BA oder a ist daher $= + 949{,}038 - \sqrt{(+900673 - 197607{,}1)} = + 949{,}038 - \sqrt{703065{,}9}$
$= + 949{,}038 - 838{,}49 = 110{,}548.$

5) Man trage auf der Seite BF vom Punkte B aus die gefundene Seite BA oder a $= 110{,}548$ auf, und ziehe von A zur Seite CE mit der Seite BC die Parallellinie A*D*, es wird dadurch vom gegebenen Vierecke AE das verlangte Trapez BD abgeschnitten.

§. 93.

V. Aufgabe, man soll (Fig. 39.) von einer Figur BCEFG ein Trapez vom gegebenen Inhalte so abschneiden, daß dessen vierte Seite AD mit der Polygonsseite BC parallel läuft, und überdieß die Seite BC oder b, dann der Winkel BCE oder C, und der Winkel CBG oder B bekannt ist.

Auflösung:

1) Den gesetzten Bedingungen gemäß soll die am gesuchten Punkte A zu ziehende Linie mit BC parallel

laufen, und es sind die Winkel B und C bekannt, deßwegen weiß man auch die Viereckswinkel BAD und CDA oder A und D, indem $A + B = 180°$, und $C + D = 180°$ (I. §. 41.), somit $A = 180° - B$, wie auch $D = 180° - C$.

2) Da man beim abzuschneidenden Trapeze B*D* nebst dessen Flächeninhalte auch die Seite BC oder b, und die Winkel A, *C* und *D* weiß, so ist nach dem III. Zusatze des §. 73., wenn man nach Nro. 3. des §. 91. auf die Größe der Summe der Winkel $A + D$ die geeignete Rücksicht nimmt, die gesuchte Viereckseite BA, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } (A + D)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin. } (A + D)^2} + \frac{2 \text{ Trapez. Sin. } C}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + D)}\right)}.$$

3) Die gefundene Seite BA oder a trage man vom Punkte B aus auf der Polygonseite BG auf, ziehe vom Punkte A in dem Fünfecke mit BC die Parallellinie AD (I. §. 39., und II. §. 148.), und verlängere diese bis zur Seite CE, es wird dadurch von dem Fünfecke BCEFG das verlangte Trapez BD abgeschnitten (I. §. 47. a.).

Zusatz: Wenn (Fig. 40.) die Linie *CE* parallel mit BG ist, und die Seite AD des abzuschneidenden bekannten Viereckes BD mit der Seite BC parallel sein soll, und überdieß die Seite BC oder b mit dem anliegenden Winkel CBG oder B gegeben ist, so ist, da der Winkel $BAD = 180° - B = BCD$, und $CDA = CBG$, oder $D = B$ (I. §. 48. Zus. III.), bei diesem Parallelogramme nebst dem Flächeninhalte, und der Seite b auch der Winkel A, und daher die gesuchte Seite *B*A (§. 73. Zus. VI.), oder

$$a = \frac{\text{Parallel.}}{b \,.\, \text{Sin. } A}.$$

Trägt man, wie vorhin, vom Punkte *B* aus auf der Seite *BG* die gefundene Linie *BA* oder a auf, und zieht man durch A bis zur Seite CE mit der Linie

BC die parallele Linie AD, so wird vom gegebenen Fünfecke das verlangte Parallelogramm abgeschnitten.

§. 94.

Beispiele zur Aufgabe des vorigen §.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 39.) von dem Fünfecke $BCEFG$ ein Trapez, welches in einem bestimmten Flächenmaaße $= 21979{,}89$, und bei welchem die Seite BC oder b $= 155$, dann der Winkel $B = 65° 30'$, und $C = 126° 10'$, so abzuschneiden, daß dessen vierte Seite AD mit BC parallel ist.

Auflösung:

1) Vom abzuschneidenden Trapeze sind nebst dem Flächeninhalte, und der Seite BC oder b alle Winkel bekannt, da AD mit BC parallel sein muß, und deßhalb der Winkel $BAD = 180° - B = 114° 30'$, und $D = 180° - C = 53° 50'$.

2) Man suche die erste Seite BA oder a, um an ihrem Endspunkte A die verlangte Parallellinie zu ziehen, es ist den hier gegebenen Stücken gemäß, indem die Summe der Winkel $A + D$ kleiner ist, als 180°, die Seite BA, oder

$$a = -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin.}(A + D)} + \sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin.}(A + D)^2} + \frac{2 \text{ Trapez.} \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin.}(A + D)}\right)}.$$

3) Nach der beim IV. Beispiele des §. 74. angeführten Auflösung ist

$$\sqrt{\left(\frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } C^2}{\text{Sin.}(A + D)^2} + \frac{2 \text{ Trapez.} \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin.}(A + D)}\right)}$$
$$= \sqrt{(382912{,}5 + 192864)} = \sqrt{575776{,}5}$$
$$= + 758{,}799,$$

$$\text{und } -\frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin.}(A + D)} = -618{,}799,$$

folglich $a = + 140$.

4) Die gefundene Seite BA oder $a = 140$ trage man vom Punkte B aus auf der Polygonsseite BG auf, und ziehe im Vielecke vom Punkte A mit BC bis zu CE die parallele Linie AD (§. 93. Nro. 3.), es wird dadurch das verlangte Trapez BD von der gegebenen Figur abgeschnitten.

II. Beispiel:

Man soll (Fig. 40.) vom Fünfecke $BCEFG$, bei dem der Flächeninhalt $= 27125{,}4$, dann BC oder $b = 240$, und der Winkel $B = 53° 50'$, ein Parallelogramm BD abschneiden, im Falle zum Voraus bekannt ist, daß CE mit AG parallel ist.

Auflösung:

1) Vom abzuschneidenden Parallelogramme BD sind nebst der Seite BC oder b alle Winkel bekannt, indem $B = D = 53° 50'$, und $A = 180° - B = 126° 10' = C$ (I. §. 48. Zus. III.).

2) Man suche aus den hier bekannten Stücken die Seite BA, es ist nach dem Zusatze des §. 93. BA, oder

$$a = \frac{\text{Parallel.}}{b \,.\, \text{Sin. } A}.$$

3) Nach der beim VI. Beispiele des §. 74. angeführten Auflösung ist den gegebenen Stücken gemäß die Seite $a = 140$; man trage von B aus auf der Seite BG die Seite BA auf, und ziehe vom Punkte A zu BC die Parallellinie AD, es wird dadurch von der gegebenen Figur das verlangte Parallelogramm abgeschnitten.

§. 95.

VI. Aufgabe, man soll (Fig. 41.) von einer geradlinigten ebenen Figur, bei welcher die Seite BC oder b, und die ihr anliegenden Winkel B und C bekannt sind, ein Viereck BD vom gegebenen Inhalte so abschneiden,

daß dessen vierte Seite DA durch einen gegebenen Punkt A der Seite BF geht.

I. Auflösung:

1) Weil beim abzuschneidenden Vierecke BD nebst dem Flächeninhalte und der Seite b die ihr anliegenden Winkel B und C gegeben sind, und überdieß die Lage des Punktes A, somit die Linie BA oder a bekannt ist, so ist der Winkel BAD oder A zu suchen, damit man unter diesem Winkel mittels der Linie AD das verlangte Viereck abschneiden kann.

2) Bei diesem Vierecke ist nach §. 73.

$$\text{Tetrag.} = \frac{\text{b . Sin. } C}{\text{Sin. D}}\left(\frac{\text{b . Sin. (C + D)}}{2} + \text{a . Sin. } A\right)$$

$$+ \frac{\text{a}^2 \text{ . Sin. A . Sin. } (A + \text{D})}{2 \text{ . Sin. D}},$$

folglich, wenn man wirklich multiplizirt, dann transponirt, und die Divisoren aufhebt (Arithm. III. §. 98.), ist

$$\text{Tetrag.} = [\text{b}^2 \text{ . Sin. C . Sin. (C + D)} + 2\text{ab} \times \text{Sin. } A \text{ . Sin. } C + \text{a}^2 \text{ . Sin. A . Sin. } (A + \text{D})] : 2 \text{ Sin. } D,$$

dann durch die Division mit Sin. A, und durch das Transponiren ist

$$2 \text{ Tetrag. Sin. } D = \text{a}^2 \text{ . Sin. } A \text{ . Sin. } (A + \text{D}) + 2\text{ab . Sin. } A \text{ . Sin. C} + \text{b}^2 \text{ . Sin. C} \times \text{Sin. (C + D)},$$

und $\text{a}^2 \text{ . Sin. } (A + \text{D}) + 2\text{ab . Sin. C}$

$$= \frac{2 \text{ Tetrag. Sin. D}}{\text{Sin. A}} - \frac{\text{b}^2 \text{ . Sin. C . Sin. (C + D)}}{\text{Sin. A}}.$$

3) Die Summe der Winkel $(A + \text{D}) + (\text{B} + \text{C})$ ist $= 360°$, dann $(A + \text{B} + \text{C}) + \text{D} = 360°$, und $(\text{C} + \text{D}) + (\text{A} + \text{B}) = 360°$ (I. §. 46.), folglich ist (II. §. 64, 65 und 66.)

$\text{Sin. } (\text{A} + D) = -\text{ Sin. } (\text{B} + \text{C})$, dann

$\text{Sin. D} = -\text{ Sin. } (\text{A} + \text{B} + \text{C})$, und

$\text{Sin. } (\text{C} + D) = -\text{ Sin. } (A + \text{B})$.

4) Man setze diese Werthe in der letzten Gleichung bei Nro. 2., es ist (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.)

$$2ab \,.\, \text{Sin.C} - a^2 \,.\, \text{Sin.}(B+C) = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin.C} \,.\, \text{Sin.}(A+B)}{\text{Sin.}\ A} - \frac{2\ \text{Tetrag. Sin.}\ (A+B+C)}{\text{Sin. A}}$$

$$= \frac{b^2 . \text{Sin.C} \,.\, \text{Sin.A} \,.\, \text{Cos.B}}{\text{Sin. A}} + \frac{b^2 . \text{Sin.C} \,.\, \text{Cos.A} \,.\, \text{Sin.B}}{\text{Sin.}\ A} - \frac{2\ \text{Tetrag. sin. A} \,.\, \text{Cos.}\ (B+C)}{\text{Sin. A}} - \frac{2\ \text{Tetrag. Cos. A} \,.\, \text{sin.}\ (B+C)}{\text{Sin.}\ A}$$

$$= b^2 \,.\, \text{Sin.C} \,.\, \text{Cos.B} + b^2 \,.\, \text{Sin.C} \,.\, \text{Sin.B} \,.\, \text{Cot.A} - 2\ \text{Tetrag. Cos.}\ (B+C) - 2\ \text{Tetrag. Sin.}\ (B+C) \times \text{Cot. A},\ \text{mithin}$$

$$2ab \,.\, \text{Sin. C} - a^2 \,.\, \text{Sin.}\ (B+C) + 2\ \text{Tetr. Cos.}\ (B+C) - b^2 \,.\, \text{Sin.}\ C \,.\, \text{Cos. B} = \text{Cot.A}[b^2 \,.\, \text{Sin.C} \,.\, \text{Sin.B} - 2\ \text{Tetrag.} \times \text{Sin.}(B+C)],$$

folglich ist

$$\text{Cot. A} = \frac{2ab \,.\, \text{Sin. C} - a^2 \,.\, \text{Sin.}\ (B+C) + 2\ \text{Tetr.} \times \text{Cos.}\ (B+C) - (b^2 \,.\, \text{Sin.}\ C \,.\, \text{Cos. B})}{(b^2 \,.\, \text{Sin. C} \,.\, \text{sin. B} - 2\ \text{Tetr.} \times \text{Sin.}\ (B+C))};$$

indem (II. §. 83.)

$$\text{Sin.}\ (A+B) = \text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. B} + \text{Cos. A} \,.\, \text{Sin. B},$$

dann, wenn man B + C wie einen Winkel betrachtet (II. §. 83.),

$$\text{Sin.}\ (A + (B+C)) = \text{Sin. A} \,.\, \text{Cos.}\ (B+C) + \text{Cos.}\ A \,.\, \text{Sin.}\ (B+C),\ \text{und (II. §. 79.)}$$

$$\frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}} = \text{Cot.}\ A.$$

5) Man berechne nach der vorstehenden Formel aus den gegebenen Stücken den Winkel A oder BAD, und ziehe unter diesem Winkel von A aus zur Linie CE die gerade Linie AD, es wird dadurch von der gegebenen Figur das verlangte Viereck BD abgeschnitten (I. §. 47. a.).

II. Auflösung:

1) Aus den hier gegebenen Stücken suche man die dritte Viereckseite CD oder c; es ist nach §. 79., da nebst dem Flächeninhalte die drei Seiten a, b und c, und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel B und C vorkommen, von welchen Stücken nur die Seite c unbekannt ist,

Tetrag. $= \frac{1}{2}ab \cdot \sin. B - \frac{1}{2}ac \cdot \sin. (B + C) + \frac{1}{2}bc \cdot \sin. C$, folglich (Arithm. III. §. 98.)

$2 \text{ Tetrag.} - ab \cdot \sin. B = bc \cdot \sin. C - ac \times \sin. (B + C)$, und

$(b \cdot \sin. - a \cdot \sin. (B + C)) \times c = 2 \text{ Tetrag.} - ab \cdot \sin. B$, weßhalb

$$c = \frac{2 \text{ Tetrag.} - ab \cdot \sin. B}{b \cdot \sin. C - a \cdot \sin. (B + C)}.$$

2) Man trage auf der Polygonsseite CE vom Punkte C aus die gefundene Seite c oder CD auf, und ziehe von D nach A die gerade Linie DA, es wird dadurch von der gegebenen Figur das verlangte Viereck BD abgeschnitten (I. §. 47. b.).

Anmerkung: Der Kürze wegen habe ich z. B. hier 2 Tetrag. Sin. A ꝛc. anstatt 2 Tetrag. × Sin. A ꝛc. geschrieben, indem es schon zum Voraus bekannt ist, daß auch ohne das Zeichen der Multiplikation diese Rechnungsart angezeigt ist (Arithm. III. §. 53.).

§. 96.

Beispiel zur Aufgabe des vorigen §.

Man soll (Fig. 41.) vom Vierecke BE ein anderes Viereck BD, welches in einem bestimmten Flächenmaaße $= 20000$, so abschneiden, daß dessen vierte Seite DA durch den gegebenen Punkt A geht, dessen Entfernung BA oder a vom Punkte B aus $= 125{,}47$, wenn zugleich bekannt ist, daß die Seite BC oder b $= 195$, dann der eine ihr anliegende Winkel CBF oder $B = 80° 7'$, und der andere Winkel BCE oder $C = 88° 2'$.

I. Auflösung:

1) Weil beim abzuschneidenden Vierecke BD nebst dessen Flächeninhalte die Seiten a und b, und die Winkel B und C bekannt sind, so suche man, um das verlangte Viereck BD abzuschneiden, den Vierecks-winkel BAD oder A.

2) Nach der I. Auflösung des §. 95. Nro. 4. ist

$$\text{Cot. } A = (2ab \,.\, \text{Sin. } C - a^2 \,.\, \text{Sin. } (B + C) + 2\,\text{Tetrag.} \times \text{Cos.}(B+C) - b^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Cos. } B) : (b^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Sin. } B - 2\,\text{Tetrag.} \times \text{Sin.}(B+C)).$$

3) Da der Winkel $B = 80° 7'$, und $C = 88° 2'$, so ist $\text{Sin. } B = \text{Sin. } 80° 7'$, $\text{Cos. } B = \text{Cos. } 80° 7'$, $\text{Sin. } C = \text{Sin. } 88° 2'$, $\text{Sin. } (B + C) = \text{Sin. } 168° 9'$, $= \text{Sin. } 11° 51'$, und $\text{Cos. } (B + C) = -\text{Cos. } 11° 51'$.

4) Ferner ist

$$\begin{aligned} 2ab \,.\, \text{Sin. } C &= +\,48904{,}47, \\ -\,a^2 \,.\, \text{Sin. } (B + C) &= -\,\;3232{,}77, \\ +\,2\,\text{Tetrag.} \times \text{Cos. } (B + C) &= -\,39147{,}54, \\ -\,b^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Cos. } B &= -\,\;6522{,}86, \\ +\,b^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Sin. } B &= +\,37438{,}63, \\ -\,2\,\text{Tetrag.} \times \text{Sin. } (B + C) &= -\,\;8214{,}01; \end{aligned}$$

Daher ist $\text{Cot. } A = ((48904{,}47 - 3232{,}77 - 39147{,}54 - 6522{,}86) : (37438{,}63 - 8214{,}01)) \times r = (1{,}3 \times r) : 29224{,}62$,

$$\begin{aligned} \text{und Log. } (1{,}3 \times r) &= 10{,}1139434, \\ \text{dann Log. } 29224{,}62 &= \;\;4{,}4657489, \end{aligned}$$

folglich $\text{Log. Cot. } A = 5{,}6481945$

$= \text{Log. Cot. } 89° 59' 51''$, und $A = 89° 59' 51''$.

5) Man trage auf der Seite BF am gegebenen Punkte A den gefundenen Winkel BAD oder $A = 89° 59' 51''$, mithin beinahe $= 90°$ auf, und verlängere dessen zweiten Schenkel AD bis zur Seite CE, es wird dadurch von der gegebenen Figur BCEF das verlangte Viereck BD abgeschnitten.

II. Auflösung:

1) Da bei dem abzuschneidenden Vierecke BD nebst dem Flächeninhalte die Seiten a und b, und die Win-

Winkel B und C bekannt sind, so suche man die Seite CD oder c.

2) Nach der II. Auflösung Nro. 2. des vorigen §. ist CD, oder

$$c = \frac{2 \text{ Tetrag.} - ab \,.\, \text{Sin. B}}{b \,.\, \text{Sin. C} - a \,.\, \text{Sin.}(B+C)}.$$

3) Da den hier gegebenen Stücken gemäß Sin. B $=$ Sin. 80° 7′, dann Sin. C $=$ Sin. 88° 2′, und Sin.(B + C) $=$ Sin. 11° 51′, so ist

$$\frac{\begin{array}{r}2 \text{ Tetrag. BD} = + 40000, \\ \text{und} \quad - ab \,.\, \text{Sin. B} = - 24103{,}55,\end{array}}{\text{also } 2 \text{ Tetrag.} - ab \,.\, \text{Sin. B} = + 15896{,}45,}$$

$$\frac{\begin{array}{r}\text{dann } b \,.\, \text{Sin. C} = + 194{,}885, \\ \text{und} \quad - a \,.\, \text{Sin.}(B+C) = - \;\; 25{,}763,\end{array}}{\text{also } b \,.\, \text{Sin. C} - a \,.\, \text{Sin.}(B+C) = + 169{,}122;}$$

folglich ist $c = \frac{15896{,}45}{169{,}122} = \frac{15896450}{169122} = 93{,}9939.$

3) Man trage auf der Seite CE vom Punkte C aus die gefundene Linie c oder CD $=$ 93,9939, mithin beinahe $=$ 94 auf, und ziehe vom Endspunkte D zum gegebenen Punkte A die gerade Linie DA, es wird dadurch auch das verlangte Viereck BD von der gegebenen Figur abgeschnitten.

III. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Vieleckes zu seinen Seiten und Winkeln.

§. 97.

I. Lehrsatz:

Wenn in einem Vielecke alle Seiten und Winkel bekannt sind, so erhält man den Flächeninhalt desselben, wenn man mit Ausnahme einer Seite jedes Paar der übrigen Seiten in den

Sinus der zwischen ihnen liegenden Winkel multiplizirt, jene Produkte, welche die Winkel paarweise enthalten, negativ, und die Produkte bei einer ungeraden Anzahl von Winkeln positiv setzt, und man am Ende die Summe aller Produkte mit 2 dividirt; das heißt, es ist (Fig. 4.) beim Sechsecke ABCDEF, wenn man außer der Seite e alle übrige zu Paaren verbindet, der Flächeninhalt desselben, oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg. ABCDEF} = [&fa \,.\, \text{Sin. A} - fb \,.\, \text{Sin.}(A+B) \\ &+ fc \,.\, \text{Sin.}(A+B+C) - fd \,.\, \text{Sin.}(A+B \\ &+ C+D) + ab \,.\, \text{Sin. B} - ac \,.\, \text{Sin.}(B+C) \\ &+ ad \,.\, \text{Sin.}(B+C+D) + bc \,.\, \text{Sin. C} - bd \\ &\times \text{Sin.}(C+D) + cd \,.\, \text{Sin. D}] : 2.\end{aligned}$$

Beweis:

1) Man nehme die der Seite EF oder e anliegende Seite AF oder f als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, und konstruire nach §. 4. für alle Ecke der Ordnung nach die entsprechenden Ordinaten und Abszissen; es ist nach dem im §. 4. vorkommenden I. Beweise

$$\begin{aligned}\text{Bm} &= a \,.\, \text{Sin. A}, \\ \text{Cq} &= -b \,.\, \text{Sin.}(A+B), \\ \text{Cn} &= a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin.}(A+B), \\ \text{Do} &= a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin.}(A+B) + c \,.\, \text{Sin.}(A+B+C), \\ \text{Dt} &= d \,.\, \text{Sin.}(A+B+C+D), \text{ und} \\ \text{Ep} &= a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin.}(A+B) + c \,.\, \text{Sin.}(A+B+C) \\ &\quad - d \,.\, \text{Sin.}(A+B+C+D).\end{aligned}$$

Ferner ist nach dem nämlichen I. Beweise des §. 4.

$$\begin{aligned}\text{Am} &= -a \,.\, \text{Cos. A}, \\ \text{Bq} &= -b \,.\, \text{Cos.}(A+B), \\ \text{Cs} &= c \,.\, \text{Cos.}(A+B+C), \\ \text{tE} &= -d \,.\, \text{Cos.}(A+B+C+D), \text{ und} \\ \text{oF} &= \text{AF} - \text{Ao} = f - (a \,.\, \text{Cos. A} - b \,.\, \text{Cos.}(A+B) \\ &\quad + c \,.\, \text{Cos.}(A+B+C)) = f - a \,.\, \text{Cos. A} \\ &\quad + b \,.\, \text{Cos.}(A+B) - c \,.\, \text{Cos.}(A+B+C).\end{aligned}$$

2) Nach Nro. 1. ist Trapez. $Aq = \frac{1}{2}(Bp + An) \times qn$ (I. §. 157.), und 2 Trapez. $Aq = (Bq + Bq - Am) \cdot Bm = (2Bq - Am) \cdot Bm = (-2b \times \text{Cos.}(A + B) + a \cdot \text{Cos. A}) \times a \cdot \text{Sin. A} = a^2 \times \text{Sin.} A \cdot \text{Cos. A} - 2ab \cdot \text{Sin.} A \cdot \text{Cos.}(A + B) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \text{Sin. 2A} - 2ab \cdot \text{Sin. A} \cdot \text{Cos.}(A + B)$, indem $\text{Sin.} A \cdot \text{Cos. A} = \frac{1}{2}\text{Sin. 2A}$ (II. §. 83. Zus. II.).

3) Das zweifache Dreieck BCq, oder $2\triangle BCq$ ist $= Bq \cdot Cq$ (I. §. 156.) $= -b \cdot \text{Cos.}(A + B) \times -b \cdot \text{Sin.}(A + B) = b^2 \cdot \text{Sin.}(A + B) \times \text{Cos.}(A + B) = \frac{1}{2}b^2 \cdot \text{Sin. } 2(A + B)$ (II. §. 83. Zus. II.).

4) Das zweifache Trapez nD, oder 2 Trapez. nD ist $= (Cn + Do) \times Cs = (a \cdot \text{Sin. A} - b \times \text{Sin.}(A + B) + a \cdot \text{Sin. A} - b \cdot \text{Sin.}(A + B) + c \cdot \text{Sin.}(A + B + C)) \times c \cdot \text{Cos.}(A + B + C) = (2a \cdot \text{Sin. A} - 2b \cdot \text{Sin.}(A + B) + c \cdot \text{Sin.}(A + B + C)) \times c \cdot \text{Cos.}(A + B + C) = 2ac \cdot \text{Sin.} A \cdot \text{Cos.}(A + B + C) - 2bc \cdot \text{Sin.}(A + B) \times \text{Cos.}(A + B + C) + c^2 \cdot \text{Sin.}(A + B + C) \times \text{Cos.}(A + B + C) = 2ac \cdot \text{Sin. A} \cdot \text{Cos.}(A + B + C) - 2bc \cdot \text{Sin.}(A + B) \times \text{Cos.}(A + B + C) + \frac{1}{2}c^2 \cdot \text{Sin. } 2(A + B + C)$.

5) Das zweifache Dreieck DtE, oder $2\triangle DtE$ ist $= tE \times Dt = -d \cdot \text{Cos.}(A + B + C + D) \times d \cdot \text{Sin.}(A + B + C + D) = -\frac{1}{2}d^2 \cdot \text{Sin. } 2(A + B + C + D)$.

6) Das zweifache Trapez tF, oder 2 Trapez. tF ist $= (oF + tE) \times Ep = (f - a \cdot \text{Cos. A} + b \cdot \text{Cos.}(A + B) - c \cdot \text{Cos.}(A + B + C) - d \cdot \text{Cos.}(A + B + C + D)) \times (a \cdot \text{Sin. A} - b \cdot \text{Sin.}(A + B) + c \cdot \text{Sin.}(A + B + C) - d \cdot \text{Sin.}(A + B + C + D))$.

Die fernere Entwickelung dieses Produktes, und die Fortsetzung des Beweises ist in der beigefügten, zu diesem §. gefertigten II. Tabelle enthalten.

I. Zusatz: Wenn bei einer geradlinigten ebenen Figur außer einer Seite, und den beiden ihr anliegenden Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel ge-

geben sind, so läßt sich nach dem vorstehenden Lehrsatze der Flächeninhalt derselben unmittelbar berechnen.

II. Zusatz: Wird die Anzahl der Seiten eines Vieleckes durch n, somit die um 1 verminderte Seitenanzahl durch $n - 1$ ausgedrückt, so enthält die nach dem vorstehenden Lehrsatze angeführte Formel $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Glieder, da es bei $n - 1$ Dingen eben so viele Paare gibt (Arithm. IV. §. 94.). Bei der vorstehenden Formel, die sich (Fig. 4.) auf ein Sechseck bezieht, von welchem fünf Seiten bekannt sind, hat man zehen Glieder, indem

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} = \frac{(6-1)(6-2)}{1.2} = \frac{5.4}{1.2} = 10.$$

III. Zusatz: Soll man (Fig. 13.) nach dem vorstehenden Lehrsatze den Flächeninhalt eines Siebeneckes bestimmen, bei welchem außer der Seite f, und den ihr anliegenden Winkeln F und G alle Seiten und Winkel bekannt sind, so ist dessen Flächeninhalt, oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = [&ga \cdot \sin. A - gb \cdot \sin.(A+B) + gc \times \sin.(A+B+C) - gd \cdot \sin.(A+B+C+D) \\ &+ ge \cdot \sin.(A+B+C+D+E) + ab \times \sin. B - ac \cdot \sin.(B+C) + ad \cdot \sin.(B+C+D) \\ &- ae \cdot \sin.(B+C+D+E) + bc \cdot \sin. C - bd \cdot \sin.(C+D) + be \cdot \sin.(C+D+E) \\ &+ cd \cdot \sin. D - ce \cdot \sin.(D+E) + de \times \sin. E] : 2.\end{aligned}$$

Bei dieser Formel kommen fünfzehen Glieder vor; indem sechs Seiten bekannt sind, und $\frac{6.5}{1.2} = 15$ (Zus. II.).

IV. Zusatz: Würde man diese Formel auf Dreiecke (Fig. 9.), oder auf Vierecke (Fig. 33.) anwenden, so ist, wenn beim Dreiecke die Seite BC oder a mit den beiden ihr anliegenden Winkeln B und C, und beim Vierecke die Seite BC oder b mit den ihr anliegenden Winkeln B und C unbekannt sind, der Flächeninhalt dieser Figuren, oder

$\triangle ABC = bc \,.\, \text{Sin. } A : 2 = \frac{bc \,.\, \text{Sin. } A}{2}$ (§. 50.), und

Tetrag. BD $=$ (ad . Sin. A $-$ ac . Sin. (A $+$ D)
$+$ dc . Sin. D) : 2 $=$ ½d(a . Sin. A $+$ c . Sin. D)
$-$ ½ac . Sin. (A $+$ D) (§. 79.).

V. Zusatz: Bei der Formel des vorstehenden Lehrsatzes läßt sich die Anzahl der Glieder abkürzen, wenn man das Vieleck durch Diagonallinien in zwei, oder mehrere Theile theilet. Wird die Figur in mehrere Theile getheilt, so müssen nach den angeführten Lehrsätzen jene Diagonalen und Winkel bestimmt werden, die bei der Berechnung der folgenden Theile als bekannte Stücke vorkommen, und nicht schon zum Voraus bekannt sind.

Theilet man (Fig. 43.) das Sechseck ABCDEF durch die von F nach C gezogene Diagonallinie CF, so bekommt man die beiden Vierecke AC und FD, wo allemal außer der Diagonal CF, und den ihr anliegenden Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel bekannt sind, im Falle beim Sechsecke alle Seiten und Winkel gegeben sind; und hier ist nach dem in diesem §. aufgestellten Lehrsatze

Tetrag. AC $=$ (fa . Sin. A $-$ fb . Sin. (A $+$ B)
$+$ ab . Sin. B) : 2, und

Tetrag. FD $=$ (cd . Sin. D $-$ ce . Sin. (D $+$ E)
$+$ de . Sin. E) : 2, folglich

Polyg. ABCDEF $=$ (fa . Sin. A $-$ fb . Sin. (A $+$ B)
$+$ ab . Sin. B $+$ cd . Sin. D $-$ ce . Sin.
(D $+$ E) $+$ de . Sin. E) : 2
$=$ [f $\times$ (a . Sin. A $-$ b . Sin. (A $+$ B))
$+$ ab . Sin. B $+$ c $\times$ (d . Sin. D $-$ e
$\times$ Sin. (D $+$ E)) $+$ de . Sin. E)] : 2.

Diese Formel hat sechs Glieder, und ohne die Vertheilung des Polygons würde man nach der im Lehrsatze dieses §. aufgestellten Formel zehen Glieder erhalten (Zus. II.).

VI. Zusatz: Die für das Siebeneck ABCDEFG im vorstehenden III. Zusatze nach dem Lehrsatze aufgestellte Formel (Fig. 36.) enthält fünfzehen Glieder.

Würde man um das Siebeneck durch die Diagonal AD in das Viereck ABCD, und in das Fünfeck AG*FED* abtheilen, so bekäme man neun Glieder; indem

Tetrag. AC = (ab . Sin. B — ac . Sin. (B + C) + cd × Sin. C) : 2, und

Polyg. AGFED = (gf . Sin. G — ge . Sin. (G + F) + gd . Sin. (G + F + E) + fe . Sin. F — fd . Sin. (F + E) + ed . Sin. E) : 2,

folglich ist

Polyg. ABCDEFG = (ab . Sin. B — ac . Sin. (B + C) + cd . Sin. C + gf . Sin. G — ge . Sin. (G + F) + gd . Sin. (G + F + E) + fe × Sin. F — fd . Sin. (F + E) + ed × Sin. E) : 2.

Anmerkung: 1) Würde man (Fig. 36.) das Siebeneck ABCDEFG durch die Diagonalen AD und DF in die Vierecke AC und AF, und in das Dreieck DEF theilen, so bekäme man nach diesem Lehrsatze für die Flächenbestimmung bei jedem Vierecke drei Glieder, und beim Dreiecke ein Glied, somit zusammen sieben Glieder. Nur müßte man in diesem Falle, wie es bei der Auflösuug des §. 86. geschehen ist, beim Vierecke AC aus den gegeben Stücken die Diagonal AD, und den Winkel BAD, mithin DAG = A — BAD berechnen, damit man im Vierecke AF außer der Diagonallinie DF, und den ihr anliegenden Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel wüßte. Zur Flächenbestimmung des letzten Theiles braucht man die Diagonal DF, und die ihr anliegenden Winkel nicht mehr, da beim Dreiecke DEF nebst dem Winkel E die Seiten d und e zum Voraus bekannt sind (§. 50.).

2) Für die Anwendung löst man, wie es auch bei den Auflösungen der Aufgaben in den folgenden §§. geschieht, bei den Formeln die Produkte in Faktoren auf, um denselben bei den Berechnungen eine bequemere Form zu geben.

§. 98.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 97.

Man soll (Fig. 13.) den Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG berechnen, wenn außer der Seite f, und den ihr anliegenden Winkeln F und G alle übrigen

Seiten und Winkel bekannt sind, und diese letzteren folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten. { a = 531, b = 361, c = 383, d = 308, e = 400, g = 550,299;

Die bekannten Winkel. { A = 121° 13', B = 113° 23', C = 84° 44', D = 270° 31', E = 105° 55'.

Auflösung:

1) Wenn man die Figur durch Diagonalen nicht abtheilt, so ist den hier gegebenen Stücken gemäß nach dem Lehrsatze, und nach dem III. Zusatze des vorigen §. der Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG, oder

Polyg. = [ga . Sin. A — gb . Sin. (A + B) + gc × Sin. (A + B + C) — gd . Sin. (A + B + C + D) + ge . Sin. (A + B + C + D + E) + ab . Sin. B — ac Sin. (B + C) + ad × Sin. (B + C + D) — ae . Sin. (B + C + D + E) + bc . Sin. C — bd . Sin. (C + D) + be . Sin. (C + D + E) + cd . Sin. D — ce . Sin. (D + E) + de . Sin. E] : 2.

Löset man zur bequemeren Berechnung die Produkte in Faktoren auf, so ist der gesuchte Flächeninhalt dieses Siebeneckes in Folge der gegebenen Stücke, oder

Polyg. = [g × (a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c × Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E)) + a × (b . Sin. B — c . Sin. (B + C) + d × Sin. (B + C + D) — e . Sin. (B + C + D + E)) + b × (c . Sin. C — d . Sin. (C + D) + e . Sin. (C + D + E)) + c × (d . Sin. D — e . Sin. (D + E)) + de × Sin E] : 2.

2) Man bestimme den Werth der ersten fünf Glieder, oder vielmehr des ersten Gliedes dieser Formel, zerfälle aber vorhin, wie es auf die vorstehende Weise geschehen ist, die Produkte in ihre Faktoren, weil die Seite g in allen diesen Gliedern vorkommt; es ist

ga . Sin. A — gb . Sin. (A + B) + gc . Sin. (A + B + C) — gd . Sin. (A + B + C + D) + ge × Sin. (A + B + C + D + E)
= g × (a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + c . Sin. (A + B + C) — d . Sin. (A + B + C + D) + e . Sin. (A + B + C + D + E)).

Nun ist nach der im §. 25. bei Nro. 5 und 6. vorkommenden Berechnung in Absicht auf das nämliche Vieleck

+ a . Sin. A	= +	454,118
— b . Sin. (A + B)	= +	294,261
+ c . Sin. (A + B + C)	=	—249,585
— d . Sin. (A + B + C + D)	= +	235,422
+ e . Sin. (A + B + C + D + E)	=	—164,181
die Summe	= +	983,801—413,766
	= +	570,035,

und Log. 570,035 = 2,7559015,
dann Log. g = Log. 550,299 = 2,7405987,
= 5,4965002
= Log. 313690; folglich ist
g × (a . Sin. A — b . Sin. (A + B) + ...)
= 313690.

3) Man berechne die nächsten vier Glieder, oder vielmehr das zweite Glied der Formel, in welchen die Seite a als gemeinschaftlicher Faktor vorkommt, löse aber vorhin die Produkte in ihre Faktoren auf; es ist

ab . Sin. B — ac . Sin. (B + C) + ad . Sin. (B + C + D) — ae . Sin. (B + C + D + E)
= a × (b . Sin. B — c . Sin. (B + C) + d × Sin. (B + C + D) — e . Sin. (B + C + D + E)).

Nun ist

b . Sin. B	=	331,351
— c . Sin. (B + C)	=	119,095
+ d . Sin. (B + C + D)	=	291,855
— e . Sin. (B + C + D + E)	=	226,85
die Summe	=	969,151,

und Log. 969,151 = 2,9863915,
dann Log. a = Log. 531 = 2,7250945,

= 5,7114860

= Log. 514619, mithin ist

$a \times (b \cdot \text{Sin. B} - c \cdot \text{Sin.}(B + C) + \ldots\ldots) = 514619.$

4) Man suche das nächste Glied der Formel; es ist

$bc \cdot \text{Sin. C} - bd \cdot \text{Sin.}(C + D) + be \cdot \text{Sin.}(C + D + E)$
$= b \times (c \cdot \text{Sin. C} - d \cdot \text{Sin.}(C + D) + e \times \text{Sin.}(C + D + E)).$

Nun ist
$c \cdot \text{Sin. C} = 381{,}383$
$-d \cdot \text{Sin.}(C + D) = 25{,}5049$
$+e \cdot \text{Sin.}(C + D + E) = 392{,}4272$

die Summe = 799,3151,

und Log. 799,3151 = 2,9027181,
dann Log. b = Log. 361 = 2,5575072,

= 5,4602253

= Log. 288552,8, daher ist

$b \times (c \cdot \text{Sin. C} - d \cdot \text{Sin.}(C + D) + \ldots\ldots) = 288552{,}8.$

5) Man suche den Werth des folgenden Gliedes, es ist

$cd \cdot \text{Sin. D} - ce \cdot \text{Sin.}(D + E)$
$= c \times (d \cdot \text{Sin. D} - e \cdot \text{Sin.}(D + E)).$

Nun ist
$d \cdot \text{Sin. D} = -307{,}987,$
und $-e \cdot \text{Sin.}(D + E) = -113{,}159,$

also $d \cdot \text{Sin. D} - e \cdot \text{Sin.}(D + E) = -421{,}146,$

und Log. 421,146 = 2,6244327,
dann Log. c = Log. 383 = 2,5831988,

= 5,2076315

= Log. 161299, folglich ist

$c \times (d \cdot \text{Sin. D} - e \cdot \text{Sin.}(D + E) = -161299.$

6) Man bestimme endlich das letzte Glied, es ist

$de \cdot \text{Sin. E} = 118476{,}7.$

7) Man bringe diese fünf gefundenen Produkte in eine Summe, und dividire diese letztere durch 2, um den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes zu erhalten.

Es ist nach den von Nro. 2 bis 6. berechneten Resultaten der Flächeninhalt dieses Siebeneckes, oder

Polyg. ABCDEFG = (313690 + 514619 + 288552,8
+ 118476,7 — 161299) : 2
= (1235338,5 — 161299) : 2
= 1074039,5 : 2 = 537019,75.

Der Flächeninhalt dieses Vieleckes ist daher in einem bestimmten Flächenmaaße = 537019,75.

Anmerkung: 1) Man vergleiche in Absicht auf diese Aufgabe die in den §§. 63 und 86. vorkommenden Auflösungen.

2) Da hier (Fig. 13.) außer der Seite FG oder f, und den ihr anliegenden Winkeln F und G alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, und diese drei Stücke in der Formel nicht vorkommen, so geschieht die Berechnung des Flächeninhaltes nach dem Lehrsatze des §. 97. auf dieselbe Weise, wenn zum Voraus alle Seiten und Winkel bekannt sind, und man kann in diesem Falle jede beliebige Seite mit den ihr anliegenden Winkeln als unbekannt annehmen.

§. 99.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 97.

Man soll (Fig. 43.) den Flächeninhalt des Sechseckes ABCDEF berechnen, wenn alle Seiten und Winkel bekannt sind, und dieselben folgende Größe haben:

Die gegebenen Seiten: a = 114, b = 98,5, c = 55, d = 89, e = 100,85, f = 154;

Die gegebenen Winkel: A = 112° 16', B = 107° 7', C = 148° 21', D = 112° 22', E = 162° 30', F = 77° 24'.

Auflösung:

1) Da bei diesem Sechsecke alle Seiten und Winkel bekannt sind, so kann man, wenn man nicht unmittelbar aus den gegebenen Stücken nach dem Lehrsatze des §. 97. den Flächeninhalt berechnen will, denselben dadurch finden, daß man nach dem V. Zusatze des nämlichen §. die Figur durch die Diagonallinie CF in die Vierecke AC und DF abtheilt, bei welchen außer der Seite CF, und den ihr anliegenden Winkeln allemal alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind.

Es ist nach dem angeführten Lehrsatze des §. 97., und nach dem erwähnten V. Zusatze desselben §. der Flächeninhalt des Sechseckes ABCDEF, oder

Polyg. = (fa . Sin **A** — fb . Sin. (A + B) + ab × Sin. B) : 2 + (cd . Sin. D — ce . Sin. (D + E) + de . Sin. E) : 2

= [f × (a . Sin. **A** — b . Sin. (A + B)) + ab . Sin. B + c × (d . Sin. D — e × Sin. (D + E)) + de . Sin. E] : 2.

2) Nun ist nach dem ersten Gliede der Formel

a . Sin. **A** = 105,5

— b . Sin. (**A** + B) = 62,5

also a . Sin **A** — b . Sin. (A + B) = 168,

und Log. 168 = 2,2253093,

wie auch Log. f = Log. 154 = 2,1875207,

= 4,4128300

= Log. 25872, folglich ist

f × (a . Sin. **A** — b . Sin. (A + B)) = 25872.

3) Das zweite Glied der Formel

ab . Sin. B ist = 10731,64.

4) Man berechne den Werth des dritten Gliedes, es ist

d . Sin. D = 82,3043

— e . Sin. (D + E) = 100,486

= 182,7903,

und Log. 182,7903 = 2,2619525,

dann Log. c = Log. 55 = 1,7403627,

= 4,0023152

= 10053,7, mithin ist

c × (d . Sin. D — e . Sin. (D + E)) = 10053,7.

5) Endlich suche man das letzte Glied der Formel, es ist

de . Sin. E = 2699,03.

6) Man bringe diese vier Produkte in eine Summe, und halbire diese, um den Flächeninhalt des ganzen Sechseckes zu erhalten; es ist nach den von Nro. 2 bis 5. gefundenen Resultaten

$f \times (a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin.}(A + B)) = 25872,$
$+ ab \,.\, \text{Sin. B} = 10731{,}64$
$+ c \times (d \,.\, \text{Sin.} D - e \,.\, \text{Sin.}(D + E)) = 10053{,}7$
und $+ de \,.\, \text{Sin. E} = 2699{,}03$

also 2 Polyg. ABCDEF = 49356,37,
und Polyg. ABCDEF = 24678,185.

Der Flächeninhalt dieses Sechseckes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße = 24678,185.

Zusatz: Weil bei der Berechnung dieses Sechseckes (Fig. 43.) nach der angegebenen Formel die beiden Winkel C und F, zu welchen die Diagonallinie CF gezogen wurde, nicht vorkommen, und diese letztere ganz innerhalb der Figur liegt, so dürfen für die Berechnung des Flächeninhaltes dieses Vieleckes diese beiden Winkel unbekannt sein, im Falle alle übrigen Winkel und alle Seiten gegeben sind.

Anmerkung: Man vergleiche rücksichtlich dieses nämlichen Sechseckes die Auflösungen, welche im §. 61., und im §. 88. vorkommen.

§. 100.

II. Lehrsatz:

Wenn (Fig. 4.) im Vielecke ABCDEF alle Seiten und Winkel bekannt sind, so ist auch der Flächeninhalt desselben, oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = (&[(a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin.}(A + B) + c \\ &\times \text{Sin.}(A + B + C) - d \,.\, \text{Sin.}(A + B \\ &+ C + D)) : -\text{Sin.}(A + B + C + D + E)] \\ &\times (d \,.\, \text{Sin. E} - c \,.\, \text{Sin.}(D + E) + b \\ &\times \text{Sin.}(C + D + E) - a \,.\, \text{Sin.}(B + C \\ &+ D + E)) + ab \,.\, \text{Sin. B} - ac \,.\, \text{Sin.}(B + C) \\ &+ ad \,.\, \text{Sin.}(B + C + D) + bc \,.\, \text{Sin. C} - bd \\ &\times \text{Sin.}(C + D) + cd \,.\, \text{Sin. D}) : 2.\end{aligned}$$

Beweis:

1) Nach dem im §. 97. aufgestellten Lehrsatze ist, wenn man mit Ausnahme der Seite f, und den ihr

anliegenden Winkeln *A* und F alle übrigen Seiten und Winkel als bekannt annimmt, der Flächeninhalt dieses Vieleckes (§. 97. Zus. 1.), oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = [&ab \,.\, \text{Sin. B} - ac \,.\, \text{Sin. (B + C)} + ad \\ &\times \text{Sin. (B + } C + D) - ae \,.\, \text{Sin. (B + C} \\ &+ D + \text{E)} + bc \,.\, \text{Sin. C} - bd \,.\, \text{Sin.(C + } D) \\ &+ be \,.\, \text{Sin. (C + } D + \text{E)} + cd \,.\, \text{Sin. } D \\ &- ce \,.\, \text{Sin. (D + E)} + de \,.\, \text{Sin. E}] : 2 \\ = [&e \times (d \,.\, \text{Sin. E} - c \,.\, \text{Sin. (}D + \text{E)} + b \\ &\times \text{Sin. (C + D + E)} - a \,.\, \text{Sin. (B + } C \\ &+ D + \text{E))} + ab \,.\, \text{Sin. B} - ac \,.\, \text{Sin.(B + C)} \\ &+ ad \,.\, \text{Sin. (B + C + } D) + bc \,.\, \text{Sin. C} \\ &- bd \,.\, \text{Sin. (C + } D) + cd \,.\, \text{Sin. D}] : 2.\end{aligned}$$

2) Wenn man die Seite AF oder f als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt annimmt, und für das Eck f die Ordinate bestimmt, so ist nach §. 4.

$$\begin{aligned}&a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin. (A + B)} + c \,.\, \text{Sin. (A + B + C)} \\ &- d \,.\, \text{Sin. (A + B + } C + D) + e \,.\, \text{Sin. (A + B} \\ &+ \text{C} + D + \text{E}) = 0,\end{aligned}$$

weßhalb, wenn man das letzte Glied transponirt, und den Werth von e ausdrückt,

$$\begin{aligned}e = [&a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin. (A + B)} + c \,.\, \text{Sin. (A} \\ &+ B + \text{C)} - d \,.\, \text{Sin. (A + } B + \text{C + } D)] \\ &: - \text{Sin. (A + } B + \text{C + } D + \text{E}).\end{aligned}$$

3) Substituirt man anstatt e diesen Werth in der Gleichung bei Nro. 1., so ist

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = (&[(a \,.\, \text{Sin. A} - b \,.\, \text{Sin. (A + B)} + c \\ &\times \text{Sin. (A + B + C)} - d \,.\, \text{Sin. (A + B} \\ &+ \text{C + D))} : - \text{Sin. (A + } B + \text{C + D + E)}] \\ &\times (d \,.\, \text{Sin. E} - c \,.\, \text{Sin. (D + E)} + b \\ &\times \text{Sin. (C + } D + \text{E)} - a \,.\, \text{Sin. (B + } C \\ &+ D + \text{E))} + ab \,.\, \text{Sin. } B - ac \,.\, \text{Sin. (B + C)} \\ &+ ad \,.\, \text{Sin. (}B + \text{C + D)} + bc \,.\, \text{Sin. C} \\ &- bd \,.\, \text{Sin. (C + D)} + cd \,.\, \text{Sin. } D) : 2.\end{aligned}$$

I. Zusatz: Wenn (Fig. 4.) bei einer geradlinigten ebenen Figur außer zwei Seiten, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, so kann man nach dem vorste-

henden Lehrsatze dieses §. aus allen übrigen bekannten Seiten und Winkeln den Flächeninhalt derselben unmittelbar berechnen; indem in der Formel die Seiten e und f, und der von ihnen eingeschlossene Winkel F nicht vorkommen, und deßhalb diese drei Stücke als unbekannt angenommen wurden.

II. Zusatz: Enthält das Vieleck eine ungerade Anzahl von Seiten, so wird in Folge der vorstehenden Beweisesführung der bei der Formel vorkommende Divisor oder Nenner positiv. Deßwegen ist (Fig. 44.), wenn man beim Fünfecke ABCDE alle Seiten und Winkel, oder auch außer den Seiten d und e, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel E alle übrigen Seiten und Winkel weiß, der Flächeninhalt dieses Fünfeckes, oder

$$\text{Polyg. } ABCDE = \left(\left(\frac{a \,.\, \sin.A - b \,.\, \sin.(A+B) + c \,.\, \sin.(A+B+C)}{\sin.\,(A+B+C+D)} \right) \right.$$
$$\times (c \,.\, \sin.\, D - b \,.\, \sin.\,(C+D) + a$$
$$\times \sin.\,(B+C+D)) + ab \,.\, \sin.\, B - ac$$
$$\left. \times \sin.\,(B+C) + bc \,.\, \sin.\, C \right) : 2.$$

III. Zusatz: Wenn man den vorstehenden Lehrsatz auf das Viereck anwendet, und nach demselben die betreffende Formel entwickelt, so ergibt sich für die Flächenbestimmung des Viereckes eine neue Formel, im Falle zwei unmittelbar auf einander folgende Seiten, und drei Winkel gegeben sind (§. 73. Zus. I.).

Wenn (Fig. 29.) beim Vierecke AC die Seiten a und d, und die Winkel B, A und D bekannt, somit die Seiten b und c mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C unbekannt sind, so ist nach dem IV. Zusatze des §. 97. der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag. } AC = (da \,.\, \sin.\, A + dc \,.\, \sin.\, D - ac$$
$$\times \sin.\,(A+D)) : 2$$
$$= [da \,.\, \sin.\, A + c \times (d \,.\, \sin.\, D - a$$
$$\times \sin.\,(A+D))] : 2.$$

Nimmt man die Seite b als Abszissenlinie, und B

als Anfangspunkt an, und bestimmt man für das Eck C nach §. 4. die Ordinate, so ist

$$a \,.\, \text{Sin.}B - d \,.\, \text{Sin.}(B+A) + c \,.\, \text{Sin.}(B+A+D) = 0,$$

dann $a \,.\, \text{Sin.}B - d \,.\, \text{Sin.}(B+A) = -c \,.\, \text{Sin.}(B+A+D)$,

$$\text{und } c = \frac{a \,.\, \text{Sin. B} - d \,.\, \text{Sin.}(B+A)}{-\text{Sin.}(B+A+D)}.$$

Setzt man nun in obiger Formel anstatt c diesen gleichen Werth, so findet man, den gegebenen Stücken gemäß den Flächeninhalt des Viereckes; es ist

$$\text{Tetrag. AC} = \left(\left(\frac{a \,.\, \text{Sin. B} - d \,.\, \text{Sin.}(B+A)}{-\text{Sin.}(B+A+D)}\right) \times (d \,.\, \text{Sin.} \,.\, D - a \,.\, \text{Sin.}(A+D)) + da \,.\, \text{Sin.}\, A\right) : 2.$$

IV. Zusatz: Entwickelt man nach dem vorstehenden Lehrsatze die Formel für das Dreieck, im Falle bei demselben eine Seite, und die beiden ihr anliegenden Winkel bekannt, mithin die beiden übrigen Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel unbekannt sind, und bezeichnet man wieder die Seiten, und Winkel nach der im §. 49. Nro. 1. angezeigten Weise, so ist nach dem IV. Zusatze des §. 97. der Flächeninhalt des Dreieckes, oder

$$\triangle \text{ ABC} = {}^1/_2 bc \,.\, \text{sin. A}.$$

Nach §. 4. ist für die Abszissenlinie CB oder a, und den Anfangspunkt C die Ordinate von B, oder

$$b \,.\, \text{Sin.}\, C - c \,.\, \text{Sin.}(C+A) = 0,$$

folglich $b \,.\, \text{Sin. C} = c \,.\, \text{Sin.}(C+A)$,

$$\text{und } c = \frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin.}(C+A)}.$$

Setzt man in obiger Formel anstatt c den gleichen Werth, so ist

$$\triangle = {}^1/_2 b \,.\, \text{Sin. A} \times c = {}^1/_2 b \,.\, \text{Sin. A} \times \frac{b \,.\, \text{Sin. C}}{\text{Sin.}(C+A)}$$

$$= \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}}{2 \,.\, \text{Sin.}(C+A)} \text{ (§. 52.)}.$$

Anmerkung: 1) Da durch den Beweis des Lehrsatzes, und die beigefügten Zusätze dieses §. die Formeln für

das Sechseck, Fünfeck, Viereck und Dreieck entwickelt wurden, und im nächsten §. auch noch die Formel für das Siebeneck vorkommt, so wird es nicht mehr schwer halten, nach diesem Lehrsatze auch für Vielecke von mehreren Seiten für die Auflösung vorkommender Aufgaben die gehörigen Formeln aufzufinden. Sollte man indeß Anstand finden, so darf man nur, wie es auf die vorstehende Weise geschehen ist, jedesmal nach §. 4. die vorkommende unbekannte Seite bestimmen, und anstatt solcher den gleichen Werth in jenen Formeln setzen, welche für die Flächenbestimmung nach §. 97. angesetzt werden.

2) Wenn (Fig. 29.) im Vierecke AC außer den zwei Seiten b und c, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C alle übrigen Stücke, somit die unmittelbar auf einander folgenden Seiten a und d, und die Winkel A, B und D bekannt sind, so weiß man auch den vierten Winkel C, da dieser $= 360° - (A + B + D)$ (I. §. 46.), und es könnte die Berechnung des Flächeninhaltes eines solchen Viereckes auch nach der im §. 73. aufgestellten Formel geschehen, gleichwie man umgekehrt auch nach der Formel des vorstehenden III. Zusatzes die im §. 73. vorkommende Aufgabe auflösen könnte, indem der Winkel $B = 360° - (A + C + D)$.

§. 101.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 100.

Man soll (Fig. 13.) den Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG berechnen, wenn außer den Seiten g und f, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel G alle übrigen Seiten und Winkel bekannt sind, und diese letzteren folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten:
$a = 531$,
$b = 361$,
$c = 383$,
$d = 308$,
$e = 400$;

Die bekannten Winkel:
$A = 121° 13'$,
$B = 113° 23'$,
$C = 84° 44'$,
$D = 270° 31'$,
$E = 105° 55'$,
$F = 91° 37'$.

Auflösung:

1) Nach der durch den Lehrsatz und den II. Zusatz des vorigen §. aufgestellten Formel ist der Flächeninhalt die-

dieses Siebeneckes den hier gegebenen Stücken gemäß, oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = (&[(a \cdot \sin. A - b \cdot \sin.(A+B) + c \cdot \sin.(A+B+C) - d \cdot \sin.(A+B+C+D) \\ &+ e \cdot \sin.(A+B+C+D+E)) : \sin.(A+B+C+D+E+F)] \times (e \cdot \sin. F - d \\ &\times \sin.(F+E) + c \cdot \sin.(F+E+D) - b \cdot \sin.(F+E+D+C) + a \cdot \sin.(F+E \\ &+ D+C+B)) + ab \cdot \sin. B - ac \cdot \sin.(B+C) + ad \cdot \sin.(B+C+D) \\ &- ae \cdot \sin.(B+C+D+E) + bc \cdot \sin. C - bd \cdot \sin.(C+D) + be \cdot \sin.(C+D+E) \\ &+ cd \cdot \sin. D - ce \cdot \sin.(D+E) + de \cdot \sin. E) : 2.\end{aligned}$$

Denn nach dem Lehrsatze des §. 97. ist bei diesem Siebenecke, wenn man die Seite g, und die ihr anliegenden Winkel F und G als unbekannt annimmt, dessen Flächeninhalt, oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = (&fe \cdot \sin. F - fd \cdot \sin.(F+E) + fc \cdot (F+E+D) - fb \cdot \sin.(F+E+D+C) \\ &+ fa \cdot \sin.(F+E+D+C+B) + ab \cdot \sin. B - ac \cdot \sin.(B+C) + ad \cdot \sin.(B+C+D) \\ &- ae \cdot \sin.(B+C+D+E) + bc \cdot \sin. C - bd \cdot \sin.(C+D) + be \cdot \sin.(C+D+E) \\ &+ cd \cdot \sin. D - ce \cdot \sin.(D+E) + de \times \sin. E) : 2.\end{aligned}$$

Wenn man nun bei der Seite f in Faktoren auflöset, dann anstatt f nach §. 25. Nro. 2 und 3. den gleichen Werth setzt, und auch bei den Seiten a, b, c und d die Produkte in Faktoren zerfällt, so erhält man für die Berechnung die bequemere Formel, nach welcher der Flächeninhalt des Siebeneckes ABCDEFG, oder

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = (&[(a \cdot \sin. A - b \cdot \sin.(A+B) + c \cdot \sin.(A+B+C) - d \cdot \sin.(A+B+C+D) + e \\ &\times \sin.(A+B+C+D+E)) : \sin.(A+B+C+D+E+F)] \times (e \cdot \sin. F - d \\ &\times \sin.(F+E) + c \cdot \sin.(F+E+D) - b \cdot \sin.(F+E+D+C) + a \cdot \sin.(F+E \\ &+ D+C+B)) + a \times (b \cdot \sin. B - c\end{aligned}$$

$\times$ Sin. $(B + C)$ + d . Sin. $(B + C + D)$
— e . Sin. $(B + C + D + E)$) + b $\times$ (c . Sin. C
— d . Sin. $(C + D)$ + e . Sin. $(C + D + E)$)
+ c $\times$ (d . Sin. D — e . Sin. $(D + E)$)
+ de . Sin. E) : 2.

2) Man berechne das erste Glied der Gleichung, das dem Werthe nach der Seite f gleich ist (§. 25. Nro. 2 und 3.).

In Folge der im §. 25. bei Nro. 5 und 6. vorkommenden ausführlichen Berechnung ist das erste Glied, oder

(a . Sin. A — b . Sin. $(A + B)$ + c . Sin. $(A$
+ B + C) — d . Sin. $(A + B + C + D)$ + e
$\times$ Sin. $(A + B + C + D + E)$) : Sin. $(A + B + C$
+ D + E + F) = 617,524.

3) Man berechne die einzelnen fünf Theile des nächsten Gliedes, welches mit dem vorigen den zweiten Faktor des ersten Produktes bildet. Es ist

e . Sin. F = + 399,841
— d . Sin. $(F + E)$ = + 92,7883
+ c . Sin. $(F + E + D)$ = + 364,1513
— b . Sin. $(F + \ldots . C)$ = + 79,8666
= + 936,6472
+ a . Sin. $(F \ldots + B)$ = — 428,678
= + 507,9692,

und Log. 507,9692 = 2,7058373,
dann Log. 617,524 = 2,7906535 (Nro. 2.),
= 5,4964908
= Log. 313690.

4) Nach den im §. 98. von Nro. 3 bis 6. angeführten Berechnungen ist, wenn man zur Abkürzung die Produkte in Faktoren auflöset,

ab . Sin. B — ac . Sin. $(B + C)$ + ad . Sin. $(B + C + D)$
— ae . Sin. $(B + C + D + E)$
= a $\times$ (b . Sin. B — c . Sin. $(B + C)$ + d . Sin. $(B$
+ C + D) — e . Sin. $(B + C + D + E)) = 514619$, dann
bc . Sin. C — bd . Sin. $(C + D)$ + be . Sin. $(C + D + E)$
= b $\times$ (c . Sin. C — d . Sin. $(C + D)$ + e . Sin. $(C$
+ D + E)) = 288552,8, ferner

cd . Sin. D — ce . Sin. (D + E)
= c × (d . Sin. D — e . Sin. (D + E))
= — 161299, und
de . Sin. E = 118476,7.

5) Man bringe diese Produkte in eine Summe, und dividire die letztere mit 2, um den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes zu erhalten.

Es ist nach den gefundenen Resultaten der Flächeninhalt dieses Siebeneckes, oder

Polyg. ABCDEFG = (313690 + 514619 + 288552,8
+ 118476,7 — 161299) : 2 = 1074039,5 : 2
= 537019,75.

Der Flächeninhalt dieses Siebeneckes ist demnach in einem bestimmten Flächenmaaße = 537019,75.

Anmerkung: Man vergleiche mit dieser Auflösung die früheren, in Absicht auf dieses Siebeneck vorgekommenen Berechnungen des Flächeninhaltes (§. 86. Anmerk.).

§. 102.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 100.

Es sei (Fig. 29.) im Vierecke AC, bei welchem die Seiten b und c mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C unbekannt sind, die Seite d = 140, und a = 155, und überdieß der Winkel A = 95° 10', dann B = 96° 30', und D = 114° 30', wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Auflösung:

1) Weil hier die Seiten d und a, und die Winkel A, B und D gegeben sind, so ist nach dem III. Zusatze des §. 100. der Flächeninhalt dieses Viereckes, oder

$$\text{Tetrag. AC} = \left(\left(\frac{\text{a . Sin. B} - \text{d . Sin. } (B + \text{A})}{-\text{Sin. (B + A + } D)} \right) \right.$$
$$\times (\text{d . Sin. D} - \text{a . Sin. } (\text{A} + D))$$
$$\left. + \text{da . Sin. A} \right) : 2.$$

2) Nun ist

a . Sin. B = 154,004,
und — d . Sin. (B + A) = 28,3104,

also a . Sin. B — d . Sin. (B + A) = 182,3144,

und Log. 182,3144 = + 2,2608209,
dann Log. (— Sin. (B + A + D)) = + 9,9070379 — 10,

— +

= + 2,3537830;

ferner ist d . Sin. D = 127,3994,
und — a . Sin. (A + D) = 76,7071,

mithin d . Sin. D — a . Sin. (A + D) = 204,1065,

und Log. 204,1065 = 2,3098571,
+ 2,3537830,

= 4,6636401
= Log. 46093,52;

endlich ist da . Sin. A = 21611,82.

3) Man bringe beide Produkte in eine Summe, und dividire diese durch 2; es ist

$$\left(\frac{\text{a . Sin. B} - \text{d . Sin. (B + A)}}{-\text{Sin. (B + A + D)}}\right)$$

× (d . Sin. D — a . Sin. (A + D)) = 46093,52,
und da . Sin. A = 21611,82,

folglich 2 Tetrag. AC = 67705,34,
und Tetrag. AC = 33852,67.

Der Flächeninhalt dieses Viereckes ist daher in einem bestimmten Flächenmaaße = 33852,67.

Anmerkung: 1) Man vergleiche diese Auflösung mit der beim I. Beispiele des §. 74. vorkommenden Auflösung, wo aus zwei bekannten, unmittelbar auf einander folgenden Seiten, und aus drei anderen gegebenen Winkeln eines Viereckes dessen Flächeninhalt berechnet wurde.

2) Ich habe hier noch das vorstehende Beispiel über die Flächenberechnung eines Viereckes mittels der vorhin dafür nach dem Lehrsatze des §. 100. entwickelten Formel beigefügt, weil dasselbe nach dem III. Zusatze

des §. 100. als im Vieleck betrachtet wird, und im vorigen Abschnitte die Berechnung des Flächeninhaltes eines Viereckes nach diesen gegebenen Stücken nicht vorgekommen ist.

3) Ich führe für die unmittelbare Bestimmung des Flächeninhaltes geradlinigter ebener Figuren aus den bekannten Seiten und Winkeln nur die beiden, in den §§. 97 und 100. aufgestellten Lehrsätze an, nach welchen man den Flächeninhalt eines Vieleckes finden kann, ohne daß dieses durch Diagonallinien in einzelne Figuren abgetheilt wird, im Falle alle Seiten und Winkel, oder auch außer einer Seite und den ihr anliegenden zwei Winkeln (§. 97. Zus. I.), oder außer zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind (§. 100. Zus. I.).

Sind bei einem Vielecke alle Seiten und Winkel gegeben, und man will daraus dessen Flächeninhalt berechnen, ohne daß man dasselbe durch Diagonallinien in einzelne Figuren theilet, oder es auch nur in Grundriß legt (§. 10.), so steht es frei, nach welchem der beiden erwähnten Lehrsätze die wirkliche Berechnung geschieht. Indeß ist aber die unmitelbare Bestimmung des Flächeninhaltes aus den gegebenen Seiten und Winkeln nach dem Lehrsatze des §. 97. bequemer, als nach dem des §. 100., weil nach jenem die betreffenden Formeln einfacher sind, und sich diese letzteren darnach mittels der Kombinationslehre auch leichter darstellen lassen (Arithm. IV. §. 94.)

Will man aber aus den gegebenen Seiten und Winkeln den Flächeninhalt eines Vieleckes ohne dessen Zerlegung in einzelne Figuren unmittelbar bestimmen, und sind dabei andere Stücke, als eine Seite mit den beiden ihr anliegenden Winkeln, oder als zwei Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel unbekannt, so berechne man vorhin nach den Vorschriften des II. Hauptstückes jene Seiten und Winkel, die man noch nöthig hat, um aus ihnen, und aus den gegebenen Stücken nach einem der beiden, in den §§. 97 und 100. vorkommenden Lehrsätze die erforderlichen Formeln zu entwickeln, und dazu bedarf es keiner besonderen Anleitung, weil im genannten Hauptstücke durch die angeführten Aufgaben, und die beigefügten Beispiele ausführlich gezeigt wurde, wie aus den gegebenen Seiten und Winkeln bei geradlinigten ebenen Figuren die noch unbekannten Seiten und Winkel gefunden werden können.

§. 103.

I. Aufgabe, eine geradlinigte ebene Figur, von welcher alle Seiten und Winkel bekannt sind, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen, im Falle dieselbe durch Diagonallinien in Dreiecke getheilt wird.

Auflösung:

1) Man theile die gegebene Figur durch Diagonallinien in Dreiecke, man erhält $n - 2$ Dreiecke, im Falle man die Anzahl der Seiten durch n ausdrückt (I. §. 52. Zus. II. und VII.).

2) Man berechne nach §. 60 und 62. aus den gegebenen Seiten und Winkeln die Größe aller einzelnen Dreiecke, und daraus den Flächeninhalt der ganzen Figur.

3) Soll man diese in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, so dividire man den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes mit der Zahl, welche die Anzahl der gesuchten Theile ausdrückt; ist aber die Figur in eine gewisse Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen, so suche man die Größe der einzelnen Theile nach den in der Proportionslehre aufgestellten Regeln (Arithm. IV. §. 40.).

4) Man vergleiche die Größe des ersten Theiles mit der Größe des ersten Dreieckes, oder mit der Summe der ersteren Dreiecke; ist jenes, oder diese so groß, als der gesuchte erste Theil, so gibt das erste Dreieck, oder die Summe der ersteren Dreiecke den verlangten ersten Theil des Polygons.

5) Ist aber das erste Dreieck, oder die Summe der ersteren Dreiecke kleiner, als der gesuchte erste Theil, so zähle man noch so viele der nächstfolgenden Dreiecke dazu, als nöthig sind, um eine Summe zu erhalten, die größer ist als der erste zu bestimmende Theil.

6) Nun nimmt man die nächstkleinere Summe der Dreiecke, und zieht diese von dem ersten Theile des Vieleckes ab, der gefundene Rest gibt die Größe des Flächenstückes, welches vom nächsten Dreiecke, und zwar auch wieder in der Gestalt eines Dreieckes abzuschneiden ist.

7) Vom abzuschneidenden Dreiecke weiß man jetzt nebst dem Flächeninhalte und einer Seite, die zugleich eine Diagonallinie des Vieleckes ist, einen dieser Seite anliegenden Winkel, welcher bei der gleich anfangs vorgenommenen Flächenberechnung der einzelnen Dreiecke des ganzen Vieleckes gefunden wurde; nach diesen bekannten Stücken berechne man nach dem II. Zusatze des §. 50. die andere der zwei Seiten, welche diesen Winkel einschließen, und ziehe vom anderen Endspunkte der vorkommenden Diagonallinie zum Endspunkte der so eben gefundenen, auf der nächsten Polygonsseite aufgetragenen Dreiecksseite eine gerade Linie, es wird durch diese vom Vielecke der verlangte erste Theil abgeschnitten, indem dieses abgeschnittene Dreieck mit der genannten kleineren Summe der Dreiecke den verlangten ersten Theil des Polygons ausmacht.

8) Die Größe des noch abgeschnittenen Dreieckes bringe man bei seinem ganzen Dreiecke in Abzug, und zähle den erhaltenen Rest zu dem nächsten Dreiecke, oder nach Erforderniß der Aufgabe zur Summe der nächsten Dreiecke, im Falle man diese letztere mit Einschluß jenes Restes zur Vergleichung mit dem zu bestimmenden folgenden Theile wissen will.

9) Nun nimmt man die Summe der beiden ersten gesuchten Theile des Vieleckes, und verfährt wieder auf die nämliche Weise, wie es von Nro. 4. bis Nro. 7. geschehen ist, um auch die gesuchten folgenden Theile vom Vielecke abzuschneiden.

10) Die Figur, welche am Ende durch die letzte Theilungslinie noch weggeschnitten wird, gibt den verlangten letzten Theil des Polygons.

Zusatz: Kann man von einem Ecke aus, wie (Fig. 23.) beim Sechsecke ABCDEF vom Ecke *A*

durch Diagonalen das Vieleck in Dreiecke theilen, derer Flächen zusammen den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes geben, und sollen sich alle Theile vermöge der Aufgabe in einem gemeinschaftlichen Punkte, etwa in A berühren, so muß man von diesem Punkte aus zu allen Ecken Diagonalen ziehen, und, wie bei der vorstehenden Auflösung, verfahren, indeß aber jedes kleine abzuschneidende Dreieck immerhin so bestimmen, daß der Punkt *A* die Spitze, oder überhaupt ein Eck desselben wird.

Anmerkung: Im I. Theile dieses Lehrbuches wird bei der VIII. und IX. Aufgabe der §§. 161 und 162. auf eine andere Weise gezeigt, wie man nach der Triangulär-Methode (II. §. 176. Anmerk. 4.) eine geradlinigte ebene Figur in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder in eine bestimmte Anzahl ungleicher Theile nach einem gegebenen Verhältnisse abtheilen kann.

§. 104.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 103.

Man soll (Fig. 23.) das Sechseck ABCDEF in zwei gleiche Theile theilen, wenn dasselbe durch Diagonallinien in Dreiecke getheilt wird, und die Seiten, welche sämmtlich der Ordnung nach bekannt sind, folgende Größe haben:

Die gegebenen Seiten:
$a = 114$,
$b = 98{,}5$,
$c = 55$,
$d = 89$,
$e = 100{,}85$,
$f = 154$;

Die gegebenen Winkel:
$A = 112° 16'$,
$B = 107° 7'$,
$C = 148° 21'$,
$D = 112° 22'$,
$E = 162° 30'$,
$F = 77° 24'$.

I. Auflösung:

1) Man ziehe von A nach *C*, *D* und E die Diagonalen AC, AD und AE, es wird dadurch das Sechseck in die vier Dreiecke ABC, *A*CD, A*D*E und AEF getheilt.

2) Man berechne nach der I. Auflösung des §. 61.

der Ordnung nach den Flächeninhalt dieser vier Dreiecke, und bringe die gefundenen vier Flächen in eine Summe, man erhält dadurch den Flächeninhalt des ganzen Sechseckes; es ist nach Nro. 10. dieser Auflösung

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 10731{,}64 = 5365{,}82,$
dann $\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 2\triangle ACD = \frac{1}{2} \times 8912{,}08 = 4456{,}04,$
ferner $\triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot 2\triangle ADE = \frac{1}{2} \times 14561{,}33 = 7280{,}665,$
und $\triangle AEF = \frac{1}{2} \cdot 2\triangle AEF = \frac{1}{2} \times 15156{,}86 = 7578{,}43,$

folglich ist Polyg. ABCDEF = 24680,955,
und ½ Polyg. ABCDEF = 12340,4775.

3) Die Summe der beiden ersten Dreiecke, oder $\triangle ABC + \triangle ACD$ ist = 9821,86, wird das dritte Dreieck, welches = 7280,665, noch dazu gezählt, so ist die Summe der drei ersten Dreiecke = 17102,525, und diese ist größer, als die gesuchte Hälfte des Polygons, welche = 12340,4775, während die Summe der beiden ersten Dreiecke kleiner ist, als die Hälfte dieses Sechseckes; daraus erkennt man, daß die Theilungslinie in das dritte Dreieck ADE fällt, und von diesem noch ein Dreieck = 2518,6175 abzuschneiden ist, damit dieses mit den beiden ersten Dreiecken *ABC* und *ACD* die verlangte erste Hälfte des Polygons beträgt, indem, wenn man das dritte Eck des abzuschneidenden Dreieckes mit G bezeichnet, ½ Polyg. — ($\triangle ABC + \triangle ACD$) = 12340,4775 — 9821,86 = 2518,6175 = $\triangle$ ADG.

4) Da für die Auflösung die Triangulär-Methode gewählt ist, und aus der zuerst vorgenommenen Flächenberechnung der einzelnen Dreiecke die Diagonallinie AD, und der Winkel ADE oder δ bekannt ist, so schneidet man das Dreieck *A*DG vom Dreiecke *ADE* so ab, daß AD als Grundlinie angenommen wird, und die Spitze G in einen Punkt der Polygonsseite *D*E fällt; es ist nach dem II. Zusatze des §. 50. die von DE abzuschneidende Seite

$$DG = \frac{2\triangle ADG}{AD \cdot \text{Sin. } \delta}.$$

Nun ist Log. (2 . △ ADG) = 3,7021922,
und Log. (*AD* . *Sin.* δ) = 2,2138101,

mithin Log. DG = 1,4883821
= Log. 30,788, und DG = 30,788.

5) Vom Punkte *D* aus trage man auf der Polygonsseite *DE* die gefundene Seite DG = 30,788 auf, und ziehe von A nach G die gerade Linie AG, es wird dadurch vom Dreiecke ADE das verlangte Dreieck ADG, und dadurch auch in der Gestalt des Fünfeckes *ABCDG* die verlangte erste Hälfte abgeschnitten, während das Viereck AGEF die andere gesuchte Hälfte dieses Sechseckes ist.

II. Auflösung:

1) Man ziehe von *A* zu C, D und *E* die Diagonalen AC, AD und $\bar{A}\bar{E}$, es wird dadurch das Vieleck wieder in die vier Dreiecke *ABC*, *ACD*, *ADE* und AEF abgetheilt.

2) Man berechne nach der II. Auflösung des §. 61. den Flächeninhalt dieser vier Dreiecke (§. 61. Anmerk. 1.), bringe diese letztere in eine Summe, und halbire diese: es ist (§. 61. Auflös. II. Nro. 5.), wenn man die Flächen der einfachen Dreiecke ausdrückt,

△ABC = ½ . 2△ABC = ½ × 10731,64 = 5365,82,
dann △ACD = ½ . 2△ACD = ½ × 8912,08 = 4456,04,
ferner △AEF = ½ . 2△AEF = ½ × 15156,86 = 7578,43,
und △ADE = ½ . 2△ADE = ½ × 14556,8 = 7278,4,

folglich ist Polyg. ABCDEF = 24678,69,
und ½ Polyg. *ABCD*EF = 12339,345.

3) Die Hälfte des Vieleckes ist = 12339,345, und das erste Dreieck AEF, im Falle man von der rechten zur linken Seite die erste Hälfte des Sechseckes abschneiden will, ist = 7578,43; würde man noch dazu das folgende Dreieck *AED* = 7278,4 zählen, so erhielte man die Summe = 14856,83, und diese ist größer, als die gesuchte erste Hälfte des Vieleckes, während das erste Dreieck *AEF* kleiner ist.

Daraus erkennt man, daß die Theilungslinie wieder in das Dreieck AED fällt, und von diesem Dreiecke ein Flächenstück = 4760,915 in der Gestalt eines Dreieckes abzuschneiden ist, welches die Diagonal AE zur Grundlinie hat, und dessen Spitze in einen Punkt der Polygonsseite ED fällt; indem, wenn man diese Spitze mit G bezeichnet, das abzuschneidende Dreieck AEG = ½ Polyg. — △ AEF = 12339,345 — 7578,43 = 4760,915, und daher die erste gesuchte Hälfte des Sechseckes = 7578,43 + 4760,915 = 12339,345.

4) Vom abzuschneidenden Dreiecke AEG weiß man den Flächeninhalt, und in Folge der vorgenommenen Berechnungen der einzelnen Dreiecke die Diagonallinie AE, und den Winkel AEG oder ε, man suche daraus die andere, diesem Winkel anliegende Seite EG; nach dem 11. Zusatze des §. 50. ist

$$EG = \frac{2 \,.\, \triangle AEG}{AE \,.\, \text{Sin. } \varepsilon}.$$

Nun ist Log. (2 . △ AEG) = 3,9787205,
und Log. (*AE* . *Sin.* ε) = 2,2136762,

folglich Log. EG = 1,7650443
= Log. 58,216, und EG = 58,216.

5) Man trage vom Punkte E aus auf der Polygonsseite ED die gefundene Seite EG = 58,216 auf, und ziehe von *A* nach G die gerade Linie AG, es wird dadurch vom Dreiecke AED das verlangte Dreieck AEG abgeschnitten, und dieses gibt mit dem ersten Dreiecke AFE die gesuchte erste Polygonshälfte AFEGA, während der andere Theil ABCDGA die zweite Hälfte dieses Sechseckes gibt.

Zusatz: Da (Fig. 23.) bei jeder dieser zwei Auflösungen die Theilungslinie von A zum nämlichen bestimmten Punkte G gezogen wird, und vom Punkte A aus das Vieleck nur durch die einzige Linie AG halbirt werden kann, so muß die Summe der Linien DG und EG die Polygonsseite *DE* oder d geben; nun ist

nach der I. Auflösung DG = 30,788, und nach der II. Auflösung EG = 58,216, folglich $DG + EG$ = 30,788 + 58,216 = 89,004, und deßhalb beinahe = 89 = DE = d.

Anmerkung: 1) Wenn die Berechnung der einzelnen Dreiecke nur von einer Seite aus geschieht, so nimmt man auch von da aus die verlangte Vertheilung des Vieleckes vor.

2) Daß die hier bei den Linien und Flächen vorkommenden unbenannten Zahlen bei der Auflösung bestimmter Aufgaben auf gewisse Längen- und Flächen-Maaße zu beziehen sind, ist aus den früheren Bemerkungen schon bekannt (§. 59. Anmerk. 3., und §. 84. Anmerk. 2.).

§. 105.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 103.

Man soll (Fig. 24.) das Siebeneck ABCDEFG in drei Theile theilen, die sich der Ordnung nach zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5, wenn alle Seiten und Winkel desselben gegeben sind, und diese folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten.

a = 531,
b = 361,
c = 383,
d = 308,
e = 400,
f = 617,524,
g = 550,299;

Die bekannten Winkel.

A = 121° 13',
B = 113° 23',
C = 84° 44',
D = 270° 31',
E = 105° 55',
F = 91° 37',
G = 112° 37'.

Auflösung:

1) Man ziehe die Diagonallinien AC, AD, DG und GE, es wird dadurch das Siebeneck in die fünf Dreiecke ABC, ACD, ADG, DGE und EFG getheilt (I. §. 52. Zus. VII.).

2) Man berechne nach der im §. 63. in Absicht auf dieses nämliche Vieleck vorkommenden Auflösung aus den gegebenen Seiten und Winkeln den Flächeninhalt der fünf Dreiecke, und bringe diese in eine Summe, um den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes zu erhalten; es ist nach §. 63. Nro. 11.

$$\begin{aligned}
\triangle ABC &= \tfrac{1}{2} \times 175947{,}4 = 87973{,}7,\\
+\triangle ACD &= \tfrac{1}{2} \times 200919, = 100459{,}5,\\
+\triangle ADG &= \tfrac{1}{2} \times 274486{,}3 = 137243{,}15,\\
+\triangle DEG &= \tfrac{1}{2} \times 175763{,}6 = 87881{,}8,\\
+\triangle EGF &= \tfrac{1}{2} \times 246911, = 123455{,}5,
\end{aligned}$$

also Polyg. ABCDEFG = 537013,65.

3) Man suche nach den gegebenen Verhältnißzahlen, derer Summe $= 2 + 3 + 5 = 10$, die Größe der drei Theile, in welches dieses Siebeneck getheilt werden soll; es verhält sich (Arithm. IV. §. 40.), wenn man die gesuchten Theile durch x, y und z ausdrückt,

$$10 : 537013{,}65 = 2 : x,$$
$$\text{dann } 10 : 537013{,}65 = 3 : y,$$
$$\text{und } 10 : 537013{,}65 = 5 : z,$$

$$\text{weßhalb } x = \frac{537013{,}65 \times 2}{10} = 107402{,}73,$$

$$\text{dann } y = \frac{537013{,}65 \times 3}{10} = 161104{,}095,$$

$$\text{und } z = \frac{537013{,}65 \times 5}{10} = 268506{,}825.$$

4) Das erste Dreieck ABC ist = 87973,7, dann die Summe der beiden ersten Dreiecke oder $\triangle ABC + \triangle ACD$ ist = 188433,2, und der gesuchte erste Proportionaltheil x ist = 107402,73, deßwegen ist das erste Dreieck kleiner, und die Summe der beiden ersten Dreiecke größer, als der gesuchte erste Theil des Vieleckes, und es fällt die erste Theilungslinie, wenn sie von A aus gezogen, und ihr Endspunkt mit P bezeichnet wird, in das Dreieck ACD.

5) Man subtrahire vom ersten Proportionaltheile x = 107402,73 das erste Dreieck ABC = 87973,7, es ist $x - \triangle ABC = 107402{,}73 - 87973{,}7 = 19429{,}03$, und diese Differenz gibt die Größe des Dreieckes ACP an, welches vom Dreiecke ACD wegzuschneiden ist.

6) Man berechne aus dem bekannten Flächeninhalte des Dreieckes ACP, dann aus der schon berechneten Diagonallinie AC, und aus dem ebenfalls schon gefundenen Winkel β oder $ACD = \measuredangle ACP$ (§. 63. Nro. 4.)

die andere, dem Winkel β anliegende Seite CP; es ist nach dem 11. Zusatze des §. 50.

$$CP = \frac{2 \triangle ACP}{AC \,.\, \text{Sin.}\beta}.$$

Nun ist

Log. $(2 : \triangle ACP) = 4{,}5894811$,

und Log. $(AC \,.\, \text{Sin.}\beta) = 2{,}7198229$,

also Log. $CP = 1{,}8696582$

$=$ Log. $74{,}0727$, und $CP = 74{,}0727$.

7) Man trage vom Punkte C aus auf der Polygonsseite CD die so eben gefundene Linie $CP = 74{,}0727$ auf, und ziehe von A zu P die gerade Linie AP, es wird dadurch vom Vielecke als der erste verlangte Proportionaltheil das Viereck ABCPA abgeschnitten, dessen Größe den Dreiecken ABC und ACP gleich ist, indem der erste gesuchte Theil $= 107402{,}73$, und $\triangle ABC + \triangle ACP = \square ABCP = 87973{,}7 + 19429{,}03 = 107402{,}73$.

8) Man addire die beiden ersten Proportionaltheile x und y, ihre Summe ist $= 107402{,}73 + 161104{,}095 = 268506{,}825$, und subtrahire davon die Summe der zwei ersten Dreiecke ABC und ACD, weil diese letztere kleiner ist, als die Summe der zwei ersten Proportionaltheile x und y, und die Summe der drei ersten Dreiecke ABC, dann ACD und ADG, welche $= 325676{,}35$, größer ist, als die Summe dieser zwei Theile; man erhält durch die Subtraktion, wenn man den Endspunkt der von D zu AG zu ziehenden zweiten Theilungslinie mit Q bezeichnet, die Größe des Dreieckes ADQ, welches vom Dreiecke ADG abzuschneiden ist.

Es ist

$x + y = 268506{,}825$,

und $\triangle ABC + \triangle ACD = 188433{,}2$,

also $x + y - (\triangle ABC + ACD) = 80073{,}625 = \triangle ADQ$.

9) Aus dem bekannten Flächeninhalte des abzuschneidenden Dreieckes ADQ, welcher $= 80073{,}625$,

dann aus der schon berechneten Diagonallinie AD, und aus dem ebenfalls schon gefundenen Winkel ε oder $DAG = DAQ$ (§. 63. Nro. 6 und 7.) berechne man die Seite AQ. Es ist (§. 50. Zus. 11.)

$$AQ = \frac{2\triangle ADQ}{AD \,.\, \text{Sin. } \varepsilon}.$$

Nun ist

$$\text{Log. } (2 \,.\, \triangle ADQ) = 5{,}2045194,$$
$$\text{und } \underline{\text{Log. } (AD \,.\, \text{Sin. } \varepsilon) = 2{,}6979220,}$$
$$\text{also Log. } AQ = 2{,}5065974$$

$=$ Log. 321,068, und $AQ = 321{,}068$.

10) Man trage auf der Polygonsseite AG vom Punkte A aus die gefundene Seite $AQ = 321{,}068$ auf, und ziehe von D zu Q die gerade Linie DQ, es wird dadurch das Viereck $APDQ$ abgeschnitten, welches der zweite verlangte Theil des Vieleckes ist, und das noch übrige Fünfeck QDEFG, welches als der letzte Proportionaltheil oder $z = 268506{,}825$, gibt den letzten verlangten Theil des Vieleckes.

Man hat dadurch das Siebeneck ABCDEFG, dessen Flächeninhalt $= 537013{,}65$, in drei Theile getheilt, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5, nämlich in das Viereck $ABCP = 107402{,}73$, dann in das Viereck $APDQ = 161104{,}095$, und in das Fünfeck $QDEFG = 268506{,}825$.

Zusatz: Will man (Fig. 24.) über die vorstehende Vertheilung des Siebeneckes eine Proberechnung machen, so berechne man nach §. 50. aus den Seiten AC und CP, und dem Winkel β den Flächeninhalt des Dreieckes ACP, und aus den Seiten AD und AQ, und dem Winkel ε den Flächeninhalt des Dreieckes ADQ, dann subtrahire man das Dreieck ACP vom Dreiecke ACD, und addire den Rest APD zum Dreiecke ADQ, man muß die drei gesuchten Proportionaltheile wieder erhalten, nämlich

$$\triangle ABC + \triangle ACP = \square ABCP = 107402{,}73,$$
dann $\triangle APD + \triangle ADQ = \square APDQ = 161104{,}095;$
und $\triangle QDG + \square GDEF = \text{Pol. } QDEFG = 268506{,}825.$

§. 106.

III. Beispiel zur Aufgabe des §. 103.

Man soll (Fig. 44.) das Sechseck ABCDEF, welches vom Punkte A aus durch Diagonallinien in Dreiecke getheilt werden kann, derer Flächen zusammen den Flächeninhalt des Sechseckes geben, in drei Theile theilen, die sich der Ordnung nach zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5, und welche den Punkt *A* gemeinschaftlich haben, wenn alle Seiten und Winkel gegeben sind, und dieselben folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten.

$a = 114,$
$b = 98{,}5,$
$c = 55,$
$d = 89,$
$e = 100{,}85,$
$f = 154;$

Die bekannten Winkel.

$A = 112° 16',$
$B = 107° 7',$
$C = 148° 21',$
$D = 112° 22',$
$E = 162° 30',$
$F = 77° 24'.$

Auflösung:

1) Man ziehe vom Punkte *A*, in welchem sich die drei gesuchten Theile berühren sollen, zu den Punkten C, D und E die Diagonallinien AC, AD und AE, es wird dadurch das Sechseck in die Dreiecke ABC, ACD, ADE und AEF getheilt, derer Flächen zusammen den Flächeninhalt des ganzen Sechseckes geben.

2) Man berechne nach §. 60. aus den gegebenen Seiten und Winkeln den Flächeninhalt dieser vier Dreiecke, und bringe diese in eine Summe, um den Flächeninhalt des ganzen Sechseckes zu erhalten. Es ist in Absicht auf dieses Sechseck nach den bei der II. Auflösung des §. 61. vorgenommenen Berechnungen

$$\begin{aligned}
\triangle ABC &= \tfrac{1}{2} \times 10731{,}64 = 5365{,}82 \\
+ \triangle ACD &= \tfrac{1}{2} \times 8912{,}08 = 4456{,}04 \\
+ \triangle ADE &= \tfrac{1}{2} \times 14556{,}8 = 7278{,}4 \\
+ \triangle AEF &= \tfrac{1}{2} \times 15156{,}86 = 7578{,}43 \\
\text{also Polyg. ABCDEF} &= 24678{,}69.
\end{aligned}$$

3) Man berechne nach den gegebenen Verhältnißzahlen

zahlen 2, dann 3 und 5 die Größe der einzelnen Theile, in welche das Sechseck zu theilen ist, und bezeichne dieselben mit den Buchstaben x, y und z; es verhält sich (Arithm. IV. §. 40)

$$10 : 24678{,}69 = 2 : x,$$
$$\text{dann } 10 : 24678{,}69 = 3 : y,$$
$$\text{und } 10 : 24678{,}69 = 5 : z,$$

$$\text{weßhalb } x = \frac{24678{,}69 \times 2}{10} = 4935{,}738,$$

$$\text{dann } y = \frac{24678{,}69 \times 3}{10} = 7403{,}607,$$

$$\text{und } z = \frac{24678{,}69 \times 5}{10} = 12339{,}345.$$

4) Die Größe des ersten gesuchten Theiles oder x ist $= 4935{,}738$, und das Dreieck ABC ist $= 5365{,}82$, somit größer, als der erste gesuchte Proportionaltheil; deßwegen fällt die erste Theilungslinie AP, im Falle man nämlich ihren Endspunkt mit P bezeichnet, in das erste Dreieck ABC, und es ist beim abzuschneidenden Dreiecke ABP, dessen Größe $= x = 4935{,}738$, aus dem bekannten Flächeninhalte, dann aus der Seite AB, und aus dem Winkel B die andere, diesem Winkel anliegende Seite BP zu berechnen; es ist nach dem II. Zusatze des §. 50.

$$BP = \frac{2\triangle ABP}{a \,.\, \text{Sin. } B}.$$

Nun ist

$$\text{Log. } (2 \,.\, \triangle ABP) = 3{,}9943821,$$
$$\text{und } \underline{\text{Log. } (a \,.\, \text{Sin } B) = 2{,}0372299,}$$
$$\text{also Log. } BP = 1{,}9571522$$

$= \text{Log. } 90{,}605$, und $BP = 90{,}605$.

5) Man trage auf der Polygonsseite BC vom vom Punkte B aus die gefundene Linie $BP = 90{,}605$ auf, und ziehe von A zu P die gerade Linie AP, man erhält dadurch das Dreieck ABP als den ersten gesuchten Theil des Sechseckes.

6) Anstatt daß man das zweite kleinere Dreieck APC, welches $= \triangle ABC - \triangle ABP = 5365{,}82 - 4935{,}738$

= 430,082, zum nächsten Dreiecke ACD addirt, und dann den zweiten verlangten Proportionaltheil y = 7403,607 abschneidet, kann man vom Dreiecke AEF aus auch gleich den dritten Proportionaltheil z = 12339,345 vom Vielecke abschneiden. Es ist △ AEF + △ ADE = 14856,83, mithin ist diese Summe größer, als der dritte gesuchte Theil z = 12339,345, und das erste Dreieck AEF = 7578,43 ist kleiner, als dieser Theil; es fällt demnach die zweite Theilungslinie AQ, wenn man nämlich ihren Endspunkt mit Q bezeichnet, in das Dreieck A*D*E.

7) Man subtrahire das Dreieck AEF = 7578,43 vom dritten Theile z = 12339,345, der gefundene Rest, welcher = 4760,915, gibt die Größe des Dreieckes AEQ, welches vom Dreiecke A*D*E noch wegzuschneiden ist.

8) Man berechne aus dem Flächeninhalte des Dreieckes AQE, dann aus der bekannten Diagonallinie AE, und aus dem ebenfalls schon gefundenen Winkel ε (§. 61. Auflös. II. Nro. 2 und 3.) die Linie EQ, es ist (§. 50. Zus. II.)

$$EQ = \frac{2 \triangle AEQ}{AE \,.\, \text{Sin.}\, \varepsilon}.$$

Nun ist Log. (2 . △ AEQ) = 3,9787205,

und Log. (AE . Sin. ε) = 2,2136762,

also Log EQ = 1,7650443

= Log. 58,216, und EQ = 58,216.

9) Man trage auf der Polygonseite E*D* vom Punkte E aus die gefundene Linie EQ = 58,216 auf, und ziehe von A zu Q die gerade Linie AQ, man erhält das Viereck AQEF als den verlangten dritten Proportionaltheil z, welcher = 12339,345.

10) Das mittlere, noch übrige Flächenstück APCDQ gibt den zweiten verlangten Proportionaltheil y, dessen Größe = 7403,607.

Man hat dadurch das Sechseck ABCDEF in die Theile A*B*P, dann APCDQ, und AQEF getheilt, welche sich der Ordnung nach zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5, und die zugleich den Punkt A gemeinschaftlich haben.

I. Zusatz: Zur Probe könnte man (Fig. 44.) aus den bestimmten Linien BP und EQ, und aus den übrigen bekannten Stücken den Flächeninhalt der Dreiecke ABP und AQE berechnen, man müßte finden, daß das $\triangle ABP = x = 4935{,}738$, dann das Viereck $AQEF = \triangle AEF + \triangle AEQ = 12339{,}345$, und daß das Fünfeck $APCDQ = \triangle ABC - \triangle ABP + \triangle ACD + \triangle ADE - \triangle AQE = \triangle APC + \triangle ACD + \triangle ADQ = 7403{,}607$.

II. Zusatz: Wenn man (Fig. 44.) nur vom Dreiecke ABC aus den Flächeninhalt der einzelnen Figuren berechnet, wie es rücksichtlich dieses Sechseckes bei der I. Auflösung des §. 61. geschehen ist, so bestimmt man nach dem gefundenen ersten Proportionaltheile ABP gleich unmittelbar den zweiten Theil $APCDQ$, es gibt dann das noch übrige Flächenstück $AQEF$ den dritten verlangten Theil des Sechseckes.

III. Zusatz: Um (Fig. 44.) den ersten Proportionaltheil ABP zu finden, könnte man auch zuerst das Dreieck APC berechnen; es ist dieses oder $\triangle APC = \triangle ABC - x$, und dann ist $CP = (2 . \triangle APC) : (AC . \text{Sin. } \alpha)$. Würde man durch die Linie AP das Dreieck APC vom Dreiecke ABC abschneiden, so hätte man auch durch das Dreieck ABP den ersten gesuchten Theil x vom Sechsecke abgeschnitten.

§. 107.

II. Aufgabe, eine gegebene geradlinigte ebene Figur, von welcher alle Seiten und Winkel bekannt sind, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen, wenn dieselbe in Vierecke überhaupt, oder in Trapezen abgetheilt wird.

Auflösung:

1) Man theile die gegebene Figur durch Diagonalen in Vierecke überhaupt, oder durch Parallellinien, die man zu einer angenommenen Basis unter einen

bestimmten, oder beliebig gewählten Winkel zieht (I. §. 39.), in Trapezen, und, wenn es nöthig ist, am Anfange und am Ende in Dreiecke (I. §. 147.), die man aber auch als Trapezen betrachten kann, bei welchen eine parallele Seite gleich Null ist (I. §. 158. Auflös. III.).

2) Man berechne nach dem §. 85., oder nach den §§. 87 und 89. den Flächeninhalt der einzelnen Vierecke, überhaupt, oder der Trapezen, und bringe diese in eine Summe, um den Flächeninhalt der ganzen Figur zu erhalten.

3) Man bestimme die Größe der einzelnen Theile, in welche das Vieleck zu theilen ist, durch die Division des Flächeninhaltes mit der Zahl, welche die Anzahl der gesuchten Theile ausdrückt, oder nach der Proportionslehre (Arithm. IV. §. 40.), je nachdem das Polygon in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder in eine bestimmte Anzahl ungleicher Theile nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen ist.

4) Man vergleiche die Größe des ersten Viereckes, oder, wenn dieses nicht so groß oder kleiner ist, die Summe der ersten Vierecke mit der Größe des ersten gesuchten Theiles. Wäre das erste Viereck überhaupt, oder das Trapez, welches nach Nro. 1., wie die letzte einzelne Figur, auch ein Dreieck sein kann, so groß, wie der erste gesuchte Theil des Vieleckes, so hätte man diesen ersten Theil schon abgeschnitten. Wäre aber das erste Viereck, oder die Summe der ersteren Vierecke kleiner, als der gesuchte erste Theil, so zähle man noch so viele der nächstfolgenden Vierecke dazu, als nöthig sind, um eine Summe zu erhalten, die größer ist, als der erste zu bestimmende Theil.

5) Man nehme jetzt die nächstkleinere Summe der Vierecke, und ziehe diese von dem ersten Theile des Vieleckes ab, der Rest gibt die Größe des Flächenstückes, welches vom nächsten Vierecke überhaupt, oder vom nächsten Trapeze, und zwar auch wieder in der Gestalt eines Viereckes überhaupt, oder eines Trapezes, abzuschneiden ist. Würde das erste Dreieck oder Viereck schon größer sein, als der erste gesuchte Theil des Vieleckes, so müßte man diesen letzteren vom Drei-

ecke oder Vierecke abziehen, um die Größe des Flächenstückes zu finden, das noch davon abzuschneiden wäre.

6) Vom abzuschneidenden Vierecke überhaupt oder Trapeze weiß man aus den gegebenen Stücken, und aus der vorgenommenen Flächenberechnung der einzelnen Figuren von zwei unmittelbar auf einander folgenden Seiten eine Seite, und alle Winkel; man berechne nach dem II. Zusatze, oder nach dem III. Zusatze des §. 73. die nächstfolgende Seite, und trage diese auf einer Polygonsseite so auf, daß dann mittels der gezogenen vierten Viereckseite der verlangte erste Theil abgeschnitten wird.

7) Wenn vom abzuschneidenden Vierecke nebst dessen Flächeninhalte außer einer von zwei unmittelbar auf einander folgenden Seiten, und allen Winkeln andere Stücke bekannt sind, um für die Bestimmung der verlangten Polygonstheile eine Seite, oder einen Winkel zu berechnen, und dieses Stück aufzutragen, so benützt man hierzu aus den für die Vierecke im vorigen Abschnitte vorgetragenen Lehrsätzen und Auflösungen die geeignete Formel. Sollte man z. B. bei einer Figur (Fig. 41.) aus dem Flächeninhalte, dann aus den Winkeln B und C, und den Seiten a und b den dritten Winkel A, oder die dritte Seite c berechnen, um das verlangte Viereck von einer geradlinigten ebenen Figur abschneiden zu können, so würde dieses nach der I. oder II. Auflösung des §. 95. geschehen.

8) Man vergleiche, wie der verlangte Theil vom Vielecke abgeschnitten sein wird, die Summe der beiden ersten gesuchten Theile mit der nächstkleineren, und nächstgrößeren Summe der einzelnen Figuren, um die Größe des abzuschneidenden Stückes für die Bestimmung des nächsten Theiles der ganzen Figur zu erkennen, und schneide dann dasselbe nach Nro. 6 oder 7. ab.

9) Man wiederhole die von Nro. 4 bis 7. angezeigte Verfahrungsweise, um den zweiten bestimmten Theil, und dann nach Nro. 8. alle übrigen Theile

abzuschneiden, in welche die geradlinigte ebene Figur zu theilen ist.

I. Zusatz: Wenn man das Vieleck für die vorzunehmende Vertheilung durch Parallellinien in Trapezen getheilt hat, so muß der Neigungswinkel bekannt sein, den dieselben mit einer angenommenen Grundlinie bilden, weil man sonst für die Berechnung der unbekannten Seite die benöthigten Winkel nicht wüßte (§. 73. Zus. II. und III.).

II. Zusatz: Wenn die Aufgabe der Art ist, daß man Theilungslinien von den Ecken der Figur aus ziehen kann, oder soll, und dadurch Dreiecksflächen abzuschneiden sind, so kommen die im §. 103. gegebenen Vorschriften in Anwendung.

§. 108.

I. Beispiel zur Aufgabe des §. 107.

Man soll (Fig. 36.) das Siebeneck ABCDEFG in zwei gleiche Theile, und in zwei ungleiche Theile theilen, welche letztere sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3 und 7, wenn die Seiten und Winkel dieses Siebeneckes, welche sämmtlich bekannt sind, folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten.
a = 531,
b = 361,
c = 383,
d = 308,
e = 400,
f = 617,524,
g = 550,299;

Die bekannten Winkel.
A = 121° 13′,
B = 113° 23′,
C = 84° 44′,
D = 270° 31′,
E = 105° 55′,
F = 91° 37′,
G = 112° 37′.

I. Auflösung:

1) Man ziehe von A zu D, und von D zu F die Diagonallinien AD und DF, es wird dadurch das Vieleck in die Vierecke AC und AF, und in das Dreieck DEF getheilt.

2) Man berechne, wie es bei §. 86. in Betreff dieses nämlichen Siebeneckes geschehen ist, den Flächeninhalt dieser drei Figuren, um daraus den Flächen-

inhalt von der Hälfte des Siebeneckes zu erhalten, im Falle dasselbe in zwei gleiche Theile zu theilen ist; es ist (§. 86. Nro. 8.)

Tetrag. AC = 188433,057,
dann Tetrag. AF = 289347,84,
und △ *D*EF = 59238,35,

also Polyg. A*BCDEFG* = 537019,247,
und ½ Polyg. ABC*D*EFG = 268509,6235.

3) Die Größe des ersten Viereckes AC ist in einem gewissen Flächenmaaße = 188433,057, dann die Hälfte des Siebeneckes ist = 268509,623, und die Summe der beiden Vierecke AC und AF ist = 477780,897, deßwegen fällt die Theilungslinie in das zweite Viereck AF, und es ist von diesem noch ein Flächenstück abzuschneiden, dessen Größe = 80076,5665, indem ½ Polyg. A*BCD*EFG — □ AC = 268509,6235 — 188433,057 = 80076,5665.

4) Damit die Theilungslinie ganz innerhalb des Viereckes AF fällt, und sich jedesmal an der Grenze des Vieleckes endet, so ist dieselbe vom Punkte D aus zu ziehen, und sie wird in einen Punkt der Seite FG, oder der Seite AG fallen, je nachdem das abzuschneidende Stück die Gestalt eines Viereckes, oder Dreieckes erhält.

5) Nach der II. Auflösung des §. 95. berechne man, im Falle der letzte Punkt der Theilungslinie mit P bezeichnet wird, die Linie PG des angenommenen Viereckes GADP aus dessen bekannten Flächeninhalte, und sowohl aus den Seiten A*D* und AG, als auch aus den Winkeln DAG und G; es ist

$$GP = \frac{2\,\text{Tetrag. AP} - g\,.\,AD\,.\,\text{Sin. DAG}}{g\,.\,\text{Sin. G} - AD\,.\,\text{Sin.}\,(DAG + G)}.$$

Nun ist

2 Tetrag. AP = + 160153,133,
und — g . AD . Sin. DAG = — 274492,4,

also 2□ . AP — g . *A*D . Sin. DAG = — 114339,267.

Ferner ist

g . Sin. G = + 507,98,
und — AD . Sin.(DAG + G) = — 15,362,
folglich g . Sin. G — AD . Sin.(DAG + G) = + 492,618;

deßwegen ist $GP = \frac{-114359,267}{+492,618} = -232,105.$

6) Weil hier GP einen negativen Werth erhält, und die Seite einer geradlinigten ebenen Figur nicht negativ sein darf, so fällt die von D aus gezogene Theilungslinie nicht auf die Seite FG, sondern auf einen Punkt der Polygonsseite AG, und es erhält das abzuschneidende Flächenstück, welches = 80076,5665, die Gestalt des Dreieckes *DAP*, zu welchem die Seite AP zu suchen ist; nach dem II. Zusatze des §. 50. ist

$$AP = \frac{2\triangle DAP}{AD \,.\, \text{Sin. } DAG}.$$

Nun ist

Log. (2 . △ *DAP*) = 5,2045354,
und Log. (AD . Sin. DAG) = 2,6979316,

also Log. AP = 2,5066038
= Log. 321,073, und AP = 321,073.

7) Man trage auf der Polygonsseite AG vom Punkte A aus die gefundene Linie AP = 321,073 auf, und ziehe von D zu P die gerade DP, man erhält das Fünfeck ABCDP als die erste verlangte Hälfte, und das noch übrige Fünfeck P*D*EFG ist die zweite Hälfte dieses Siebeneckes.

II. Auflösung:

1) Man ziehe (Fig. 45.), wie vorhin, die Diagonallinien AD und DF, berechne nach §. 86. den Flächeninhalt der Vierecke AC und A*F*, und des Dreieckes DEF, und bringe diese drei Flächen in eine Summe, um den Flächeninhalt des ganzen Siebeneckes zu erhalten; es ist (§. 86. Nro. 8.)

Tetrag. AC = 188433,057,
dann Tetrag. AF = 289347,84,
und △ DEF = 59238,35,

mithin Polyg. ABCDEFG = 537019,247.

2) Man berechne nach den gegebenen Verhältnißzahlen 3 und 7 die Größe eines jeden Theiles der ganzen Figur (Arithm. IV. §. 40.), und bezeichne diese zwei Theile mit x und y; es verhält sich

$$10 : 537019{,}247 = 3 : x,$$
$$\text{und } 10 : 537019{,}247 = 7 : y,$$

$$\text{weßhalb } x = \frac{537019{,}247 \times 3}{10} = 161105{,}7741,$$

$$\text{und } y = \frac{537019{,}247 \times 7}{10} = 375913{,}4729.$$

3) Die Größe des ersten Proportionaltheiles x ist = 161105,7741, und das erste Viereck AC ist = 188433,057, deßwegen schneide man von diesem Vierecke ein Viereck ab, dessen Größe = 161105,7741, und somit den ersten Proportionaltheil ausmacht.

4) Will man dieses letztere Viereck durch eine vom Punkte A aus zur Polygonsseite CD gezogene Linie AQ abschneiden, so weiß man vom abzuschneidenden Vierecke $ABCQ$ nebst dem Flächeninhalte, welcher = x = 161105,7741, und den Seiten AB und BC die Winkel B und C, man berechne daraus nach §. 95. den Winkel BAQ, unter welchem die Linie AQ zur Seite CD zu ziehen ist, oder, was beguemer ist, man suche aus diesen bekannten Stücken die Viereckseite CQ; es ist (§. 95. Auflös. II.)

$$CQ = \frac{2 \text{ Tetrag. } ABCQ - ab \,.\, \text{Sin. } B}{b \,.\, \text{Sin. } C - a \,.\, \text{Sin. } (B + C)}.$$

Nun ist (§. 63. Nro. 3.)

$$2 \text{ Tetrag. } ABCQ = 322211{,}5482,$$
$$\text{und } - ab \,.\, \text{Sin. } B = 175947{,}4,$$
$$\text{also } 2 \text{ Tetrag. } ABCQ - ab \,.\, \text{Sin. } B = 146264{,}1482;$$

$$\text{ferner } b \,.\, \text{Sin. } C = 359{,}476,$$
$$\text{und } - a \,.\, \text{Sin. } (B + C) = 165{,}116,$$
$$\text{mithin } b \,.\, \text{Sin. } C - a \,.\, \text{Sin. } (B + C) = 524{,}592;$$

$$\text{daher ist } CQ = \frac{146264{,}1482}{524{,}592} = 278{,}815.$$

5) Man trage vom Punkte C aus auf der Polygonsseite CD die gefundene Linie CQ = 278,815 auf, und ziehe von A zu Q die gerade Linie AQ; es ist das abgeschnittene Viereck ABCQ der verlangte erste Theil, und das noch übrige Sechseck AQ*D*EFG der gesuchte zweite Theil, welcher =375913,4729; indem Polyg. *A*BCDEFG—□ AB*C*Q = Polyg. AQDEFG, und 537019,247 — 161105,7741 = 375913,4729.

Man hat dadurch dieses Siebeneck in zwei Theile getheilt, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3 und 7.

Zusatz: Bei der vorstehenden II. Auflösung (Fig. 45.) hätte man auch beim Dreiecke AQ*D*, welches = □ ABCD — □ ABCQ, aus dessen Flächeninhalte, dann aus der Diagonallinie AD, und aus dem Winkel ADQ, im Falle dieser aus einer früheren Berechnung bekannt wäre, nach dem II. Zusatze des §. 50. die Seite *D*Q berechnen, dann diese auf DC vom Punkte D aus auftragen, und hierauf vom Punkte A zu Q die Theilungslinie AQ ziehen können (§. 103.).

Anmerkung: Bei dem hier in der II. Auflösung Nro. 4. zitirten §. 63. Nro. 3. ist bei der Bestimmung des Logarithmus des Produktes ab . Sin. B auf Seite 206. Zeile 9. von oben herab Log. Sin. B = 9,9627812 — 10 anstatt Log. 2△ ABC = 9,9627812 — 10 zu lesen.

§. 109.

II. Beispiel zur Aufgabe des §. 107.

Man theile (Fig. 46.) das Sechseck ABCDEF durch Perpendikel, welche auf eine als Basis angenommene Polygonsseite gezogen werden, in drei gleiche Theile, wenn alle Seiten und Winkel dieser Figur gegeben sind, und dieselben folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten.

a = 114,
b = 98,5,
c = 55,
d = 89,
e = 100,85,
f = 154;

Die bekannten Winkel.

A = 112° 16',
B = 107° 7',
C = 148° 21',
D = 112° 22',
E = 162° 30',
F = 77° 24'.

Auflösung:

1) Man nehme die Seite *AF* oder f als Abszissenlinie, und A als Anfangspunkt an, und ziehe von den Ecken B, C, *D* und E auf die Seite f, und auf ihre Verlängerung die Ordinaten Bm, Cn, Do und Ep (§. 3. Nro. 1.), es wird dadurch das Sechseck in die Trapezen mC, n*D* und oE, und am Anfange und am Ende in die Dreiecke mBA und EpF getheilt, die man aber auch als Trapezen betrachtet.

2) Man berechne, wie es nach dem Lehrsatze des §. 4. durch die I. und II. Auflösung des §. 11. in Absicht auf dieses Sechseck geschehen ist, der Ordnung nach alle Abszissen und Ordinaten, und bestimme daraus sowohl die Größe aller einzelnen Figuren, als auch durch die Summirung dieser letzteren den Flächeninhalt des ganzen Sechseckes, und dann des dritten Theiles desselben (§. 87 und 88.); es ist nach Nro. 3. des §. 88. wegen der in Absicht auf dieses Sechseck vorgenommenen Flächenberechnung

— △ mBA	= +	..... — 2278,8
+ Trap. mC	= +	10406,675
+ Trap. nD	= +	9357,65
+ Trap. oE	= +	6105,74
+ △ EpF	= +	1082,4

folglich Polyg. ABCDEF = + 26952,465 — 2278,8 = 24673,665, und ⅓ Polyg. A*B*CDEF = 8224,555.

3) Das erste Trapez mC ist = 10406,675, subtrahirt man davon das Dreieck Bm*A*, welches = 2278,8, und nicht zum Flächeninhalte des Vieleckes gehört, so ist das Viereck ABCn = Trap. mC — △ mBA = 10406,675 — 2278,8 = 8127,875, und dieses ist kleiner, als der gesuchte erste dritte Theil des Sechseckes, welcher = 8224,555, während die Summe des Viereckes AC und des Trapezes nD, welche = 17485,525, größer ist, als dieses Drittel; die erste Theilungslinie fällt deßwegen in das zweite Trapez nD, und es ist von diesem, wenn man die Theilungslinie mit GH bezeichnet, ein kleineres Trapez nCGH abzuschneiden,

dessen Größe = 96,68, indem ⅓ Polyg. ABCDEFG — □ AC = 8224,555 — 8127,875 = 96,68.

4) Man ziehe von den Punkten *B*, C und E zu den Ordinaten Cn und Do mit der Abszissenlinie AF die Parallellinien Bq, Cs und tE; es ist im Trapeze nD der Winkel nCG = n*C*s + sCD = R + sCG, und s*C*G ist = A + *B* + *C* — 4R (§. 4. Nro. 5 und 6.), weßhalb nCG = R + A + B + *C* — 4R = A + *B* + C — 3R = 367° 44′ — 270° = 97° 44′, und CGH = 2R — nCG = 180° — 97° 44′ = 82° 16′ (1. §. 41.).

5) Beim abzuschneidenden Trapeze nG weiß man nebst dessen Flächeninhalte und allen erforderlichen Winkeln auch die Ordinate nC von den beiden unmittelbar auf einander folgenden Seiten Hn und nC; deßwegen ist nach dem III. Zusatze des §. 73. die andere Seite, oder

$$Hn = -\frac{nC \,.\, \text{Sin. } nCG}{\text{Sin. } (nHG + CGH)} + \sqrt{\left(\left(\frac{nC \,.\, \text{Sin. } nCG}{\text{Sin. } (nHG + CGH)}\right)^2 + \frac{2\,\text{Trapez. } nG \,.\, \text{Sin. } nCG}{\text{Sin. } nHG \,.\, \text{Sin. } (nHG + CGH)}\right)}.$$

Nun ist, da nHG + *C*GH = 172° 16′, somit diese Summe kleiner ist, als es zusammen zwei rechte Winkel sind, und deßhalb die positive Wurzel genommen wird (§. 91. Nro. 3.)

$$\left(\frac{nC \,.\, \text{Sin. } nCG}{\text{Sin. } (nHG + CGH)}\right)^2 = 1530500,$$

$$\text{und } \frac{2\,\text{Trapez. } nG \,.\, \text{Sin. } nCG}{\text{Sin. } nHG \,.\, \text{Sin. } (nHG + CGH)} = 1423{,}88$$

$$= 1531923{,}88,$$

$$\text{und } \sqrt{1531923{,}88} = +1237{,}71,$$

$$\text{dann } -\frac{nC \,.\, \text{Sin. } nCG}{\text{Sin. } (nHG + CGH)} = -1237{,}13,$$

folglich ist Hn = + 0,58.

6) Man trage auf der Abszisse no vom Punkte n aus die gefundene Linie nH = 0,58 auf, errichte am Punkte H auf no das Perpendikel HG, und verlängere dieses bis zur Polygonsseite CD, es wird dadurch vom Trapeze nD das Trapez nG abgeschnitten, welches mit dem Vierecke ABCn den verlangten ersten dritten Theil des Sechseckes gibt, indem □ AC + Trapez. nG = 8127,875 + 96,68 = 8224,555 = ⅓ Polyg. ABCDEF.

7) Man addire die beiden ersten Drittel des Sechseckes, es ist ihre Summe = 8224,555 × 2 = 16449,11, und vergleiche diese mit der nächstkleineren, und der nächstgrößeren Summe der anfangs berechneten Trapezenflächen. Es ist das Viereck AC = 8127,875, und □ AC + Trapez. nD = 17485,525; diese Summe ist größer, und das Viereck AC ist kleiner, als die Summe der beiden ersten Drittel des Sechseckes, welche = 16449,11; deßwegen fällt die zweite Theilungslinie, die man von der Abszissenlinie AF aus mit KU bezeichnen kann, ebenfalls in das Trapez nD, von welchem jetzt ein Trapez KnCU abzuschneiden ist, dessen Größe = 8321,235, indem ⅔ Polyg. $ABCDEF$ — □ AC = 16449,11 — 8127,875 = 8321,235.

8) Beim abzuschneidenden Trapeze nCUK weiß man nebst dem Flächeninhalte, welcher = 8321,235, und der Seite nC, welche = 168, auch den Winkel KnC = 90°, dann den Winkel nCU = nCG = 97° 44' (Nro. 4.), und den Winkel CUK = CGH = 82° 16' (I. §. 41.), daraus läßt sich nach dem III. Zusatze des §. 73. die andere, dem Winkel KnC anliegende Seite Kn berechnen; es ist, da die Summe der Winkel nKU + CUK, welche = 172° 16', kleiner ist, als 180°, und deßwegen wieder die Wurzelgröße positiv wird (§. 91. Nro. 3.),

$$Kn = -\frac{nC \,.\, Sin.\, nCU}{Sin.\,(nKU + CUK)} + \sqrt{\left(\left(\frac{nC \,.\, Sin.\, nCU}{Sin.\,(nKU + CUK)}\right)^2\right.}$$

$$+\frac{2\,\text{Trapez. nU . Sin. nCU}}{\text{Sin. nKU . Sin. (nKU + CUK)}}\Big).$$

Nun ist

$$\left(\frac{\text{nC . Sin. nCU}}{\text{Sin. (nKU + CUK)}}\right)^2 = 1530500,$$

$$\text{und } \frac{2\,\text{Trapez. nU . Sin. nCU}}{\text{Sin. nKU . Sin. (nKU + CUK)}} = 122553,$$

$$= 1653053,$$

$$\text{und } \sqrt{1653053} = +1285{,}71,$$

$$\text{dann } -\frac{\text{nC . Sin. nCU}}{\text{Sin. (nKU + CUK)}} = -1237{,}13,$$

folglich ist Kn = + 48,58.

9) Man trage auf der Abszisse no vom Punkte n aus die gefundene Linie nK = 48,58 auf, errichte am Punkte K das Perpendikel KU, und verlängere dieses bis zur Polygonsseite CD, es gibt das Viereck KHGU das zweite gesuchte Drittel, während das noch übrige Flächenstück KUDEF den dritten verlangten Theil des Sechseckes gibt.

Man hat auf diese Weise mittels der auf die Basis AF perpendikulär gezogenen Theilungslinien GH und KU das Sechseck ABCDEF in drei gleiche Theile getheilt.

Anmerkung: 1) Da bei dieser Aufgabe die Berechnung des Flächeninhaltes nach der im §. 88. angeführten Auflösung in Absicht auf dieses nämliche Sechseck vorausgesetzt wird, und derselbe aus den vorhin nach §. 11. berechneten Abszissen und Ordinaten bestimmt wurde, welche nach dem im §. 4. aufgestellten Lehrsatze nur bis auf eine Dezimalstelle ausgedrückt sind, so weicht die hier angegebene Größe des Sechseckes von dem im §. 61. und im §. 99. unmittelbar aus den gegebenen Seiten und Winkeln berechneten Flächeninhalte etwas mehr ab. Will man nicht bloß aus den gefundenen Abszissen und Ordinaten nach Vorschrift des §. 10. die Figur in Grundriß legen, sondern hat man die Absicht, bei ihr nach der Perpendikulär-Methode (II. §. 176. Anmerk. 4.) den Flächeninhalt zu berechnen, und etwa auch einige Vertheilungen vorzunehmen,

so muß man, wie es im §. 13. beim vorkommenden Zehenecke geschehen ist, die Abzissen und Ordinaten bis auf mehrere Dezimalstellen bestimmen, damit sich darnach der Flächeninhalt der ganzen Figur, und ihrer einzelnen Theile genauer ergibt.

2) Wenn man (Fig. 46.), wie es im folgenden §. bei der II. Auflösung in Absicht auf das angeführte Siebeneck der Fall ist, von den durch die vorstehende Auflösung bestimmten Punkten H und K aus mit dem Perpendikel nC die Parallellinien HG und KU zu der Polygonsseite nC nicht ziehen will, so kann man im Trapeze nG aus dem bekannten Flächeninhalte, und den unmittelbar auf einander folgenden, durch die vorgenommenen Berechnungen bekannten Seiten Hn und nC, und aus allen gefundenen erforderlichen Winkeln nach der II. Auflösung des §. 95. die Seite CG, oder diese letztere auch nach dem III. Zusatze des §. 73. aus dem Flächeninhalte, dann aus der Seite nC, und aus allen bekannten benöthigten Winkeln berechnen, und ein Gleiches auch im Trapeze nU in Absicht auf die Seite CU thun; trägt man dann auch noch auf der Polygonsseite CD vom Punkte C aus die Linien CG und CU auf, und zieht man von H zu G, und von K zu U die geraden Linien HG und KU, so sind diese mit dem Perpendikel nC parallel, und deßwegen auch auf AF senkrecht (I. §. 38. Zus. I., und §. 41. Zus. VII.), indem CnH + nHG = 180°, und CnK + nKU = 180°; und es werden durch die Theilungslinien HG und KU ebenfalls die zwei verlangten Trapezen nG und nU abgeschnitten.

3) Weil nach der vorstehenden Auflösung die Linie Hn = 0,58, so fällt beim abzuschneidenden Trapeze nG die Theilungslinie HG beinahe mit der Ordinate nC zusammen.

§. 110.

III. Beispiel zur Aufgabe des §. 107.

Man soll (Fig. 47.) das Siebeneck ABCDEFG, von welchem alle Seiten und Winkel bekannt sind, in drei Theile theilen, welche sich der Ordnung nach zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5, wenn sich die Grundlinien derselben zu einer als Basis angenommenen Seite des Vieleckes unter einem gegebenen, oder beliebig angenommenen Winkel neigen, und die gegebenen Stücke folgende Größe haben:

Die bekannten Seiten. { a = 531, b = 361, c = 383, d = 308, e = 400, f = 617,524, g = 550,299;

Die bekannten Winkel. { A = 121° 13', B = 113° 23', C = 84° 44', D = 270° 31', E = 105° 55', F = 91° 37', G = 112° 37'.

I. Auflösung:

1) Man nehme die Polygonsseite AG als Basis an, ziehe unter dem gegebenen, oder beliebig angenommenen Winkel MAG = 100° 30' bis zur Vielecksseite BC die gerade Linie AM, und mit dieser von den übrigen Ecken *C*, D, E und G aus die Parallellinien CN, *DO*, EQ und GP, es bilden diese mit AG, und mit ihrer Verlängerung immer einen Neigungswinkel, welcher = MAG = 100° 30', da MAG = CNO = DOG ꝛc. = 100° 30' (I. §. 41.), und es wird das Vieleck, wenn man die Parallellinien jedesmal bis zur gegenüber stehenden Grenze verlängert, in die Trapezen *AC*, ND, OP und GE, und in die Dreiecke ABC und QEF getheilt.

2) Man berechne, wie es im §. 90. nach Vorschrift des §. 89. geschehen ist, den Flächeninhalt dieser einzelnen Figuren, und daraus die Größe des ganzen Siebeneckes; es ist (§. 90. Nro. 17.)

	△ *BA*M =	63742,94
+	Trapez. AC =	51404,405
+	Trapez. ND =	152312,9
+	Trapez. OP =	142909,15
+	Trapez. GE =	6361,795
+	△ EFQ =	120288,
	also Polyg. ABCDEFG =	537019,19.

3) Man berechne nach den gegebenen Verhältnißzahlen die Größe der einzelnen Theile, in welche das Vieleck zu theilen ist; es verhält sich (Arithm. IV. §. 40.), wenn man diese Theile mit x, y und z bezeichnet,

10 : 537019,19 = 2 : x,
dann 10 : 537019,19 = 3 : y,
und 10 : 537019,19 = 5 : z,

weß-

weßhalb $x = \frac{537019{,}19 \times 2}{10} = 107403{,}838,$

dann $y = \frac{537019{,}19 \times 3}{10} = 161105{,}757,$

und $z = \frac{537019{,}19 \times 5}{10} = 268509{,}595.$

4) Das erste Dreieck BAM, welches $= 63742{,}94$, ist kleiner, und die Summe dieses Dreieckes, und des ersten Trapezes AC, welche $= \triangle ABM + \text{Trap. } AC = 63742{,}94 + 51404{,}405 = 115147{,}345$, ist größer, als der gesuchte erste Theil x, welcher $= 107403{,}838$; die erste Theilungslinie fällt deßwegen in das Trapez AC, und es ist davon, wenn man die Endspunkte dieser Linie mit J und H bezeichnet, ein Trapez AMHJ abzuschneiden, deßen Größe $= 43660{,}898$, indem $x - \triangle BAM = 107403{,}838 - 63742{,}94 = 43660{,}898$.

5) Aus Nro. 1 und 4., und aus den im §. 90. vorgenommenen Berechnungen weiß man in Absicht auf das abzuschneidende Trapez AH, daß deßen Flächeninhalt $= 43660{,}898$, die Seite $AM = 678{,}6953$, der Winkel $AJH = ANC = 79° 30'$, der Winkel $AMH = AMC = 134° 6'$, und der Winkel $MHJ = MCN = 45° 54'$; daraus kann man die andere, dem Winkel MAJ anliegende Seite JA berechnen, es ist nach dem III. Zusatze des §. 73.

$$JA = -\frac{AM \,.\, \text{Sin. } AMH}{\text{Sin. } (AJH + MHJ)}$$

$$+ \sqrt{\left(\left(\frac{AM \,.\, \text{Sin. } AMH}{\text{Sin. } (AJH + MHJ)}\right)^2 + \frac{2 \text{ Trapez. } AH \,.\, \text{Sin. } AMH}{\text{Sin. } AJH \,.\, \text{Sin. } (AJH + MHJ)}\right)}.$$

Nun ist, da die Summe der Winkel $AJH + MHJ$ kleiner ist, als 180°, und deßwegen die Wurzelgröße positiv genommen wird (§. 91. Nro. 3.),

$$\text{Log. (AM . Sin. } A\text{MH)} = + 2{,}6878757,$$
$$\text{und Log. Sin. } (A\text{JH} + \text{MHJ}) = + 9{,}9112257 - 10,$$
$$= + 2{,}7766500$$

$$= \text{Log. } 597{,}93,$$

$$\text{dann Log.} \left(\frac{\text{AM . Sin. AMH}}{\text{Sin. (AJH} + \text{MHJ)}} \right)^2 = 5{,}5533000$$

$$= \text{Log. } 357519{,}8,$$

$$\text{ferner Log.(2 Trap.AH . Sin.AMH)} = + 4{,}7973235,$$
$$\text{und L.(Sin.AJH . Sin.(AJH + MHJ))} = + 0{,}9038918 - 10,$$
$$= + 4{,}8934317$$

$$= \text{Log. } 78240{,}52,$$

$$\text{daher ist} \left(\frac{\text{AM . Sin. AMH}}{(\text{Sin. AJH} + \text{MHJ})} \right)^2 = 357519{,}8,$$

$$\text{und} \frac{\text{2 Trap. AH . Sin. AMH}}{\text{Sin. AJH . Sin. (AJH} + \text{MHJ)}} = 78240{,}52,$$

$$= 435760{,}32,$$

$$\text{dann } \sqrt{435760{,}32} = + 660{,}1213,$$

$$\text{ferner} - \frac{\text{AM . Sin. } A\text{MH}}{\text{Sin. (AJH} + \text{MHJ)}} = - 597{,}93,$$

folglich ist JA = + 62,1913.

6) Man trage im Trapeze AC auf dessen Seite *AN* vom Punkte A aus die gefundene Linie JA = 62,1913 auf, und ziehe vom Punkte J mit AM die Parallellinie JH bis zur Polygonsseite *BC*; es wird dadurch vom Trapeze AC das verlangte Trapez AH abgeschnitten, und das Viereck ABHJ gibt den ersten gesuchten Proportionaltheil des Siebeneckes, welcher = 107403,838.

7) Die Summe der beiden ersten Proportionaltheile x + y ist = 107403,838 + 161105,757 = 268509,595, und so groß ist nach Nro. 3. der dritte Proportionaltheil z; man schneide nun diesen letzteren vom Dreiecke EFQ aus ab, da man auch von da aus im §. 90. die letzten drei einzelnen Figuren des Siebeneckes berechnet hat.

8) Die Summe des Dreieckes EFQ und des Trapezes GE ist = 126649,795, und die Summe des Dreieckes EFQ, und der Trapezen GE und OP ist = 269558,945; jene ist kleiner, und diese ist größer, als der gesuchte dritte Proportionaltheil z, welcher = 268509,595, deßwegen fällt die zweite Theilungslinie, die man mit K und L bezeichnen kann, in das Trapez OP, und es ist von diesem ein kleineres Trapez LKPG abzuschneiden, dessen Größe = 141859,8, indem z — (△ EFQ + Trapez. GE) = 268509,595 — 126649,795 = 141859,8.

9) Vom abzuschneidenden Trapeze LP weiß man nebst dessen Flächeninhalte, welcher = 141859,8, und der Seite GP auch die drei Winkel LKP, PGL und KLG, welche man nöthig hat, um die Seite KP zu berechnen. Es ist GP = 738,019 (§. 90. Nro. 15.), dann der Winkel LKP = GPE = 129° 21', ferner PGL = ANC = 79° 30', und KLG = MAN = 100° 30' (§. 90. Nro. 10 und 14.);

Uiberdieß ist

$$KP = -\frac{PG \,.\, \text{Sin. } PGL}{\text{Sin. } (LKP + KLG)} - \sqrt{\left(\left(\frac{PG \,.\, \text{Sin. } PGL}{\text{Sin. } (LKP + KLG)}\right)^2 + \frac{2 \text{ Trapez. } LP \,.\, \text{Sin. } PGL}{\text{Sin. } LKP \,.\, \text{Sin. } (LKP + KLG)}\right)}.$$

Die Summe der Winkel LKP + KLG, welche = 229° 51', ist größer, als 180°, deßwegen wird nach §. 91. Nro. 3. die Wurzelgröße negativ genommen, und es ist

Log. (PG . Sin. PGL) = + 2,8607336,

und Log. Sin. (LKP + KLG) = + 9,8832974 — 10,

$$= + \ 2{,}9774362$$

= Log. 949,3714.

dann ist Log. $\left(\frac{PG \,.\, \text{Sin. } PGL}{\text{Sin. } (LKP + KLG)}\right)$ = 5,9548724

= Log. 901306,2;

ferner ist L.(2Trap.LP . Sin.P*G*L) = +5,4455555,
und L.(Sin.LKP . Sin.(LKP + KLG)) = +0,7716382 — 1;
— +
= +5,6739173
= Log. 471973,11.

Es ist jetzt, da der Sinus von der Summe der Winkel LKP + KL*G* negativ ist (II. §. 66.), und alle Quadrate positiv sind (Arithm. III. §. 73.),
KP = — (— 949,3714) — √(901306,2 — 471973,11)
= 949,3714 — √429333,09 = 949,3714—655,235
= 294,1364.

10) Man trage auf der Seite E*D* vom Punkte P aus die gefundene Linie PK = 294,1364 auf, und ziehe von dem Punkte K mit PG bis zur Polygonsseite A*G* die Parallellinie KL, es wird dadurch vom Siebenecke das Fünfeck LKEF*G* als der gesuchte dritte Proportionaltheil abgeschnitten, welcher = 268509,595, und das übrige Flächenstück JH*C*DKL gibt den verlangten zweiten Proportionaltheil, dessen Größe = 161105,757.

Man hat dadurch auf die verlangte Weise durch die Linien JH und KL das Siebeneck in drei Theile getheilt, die sich der Ordnung nach zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5.

II. Auflösung:

1) Man bestimme, wie es von Nro. 1 bis 4. bei der vorigen Auflösung geschehen ist, nach den angeführten Lehrsätzen sowohl die Größe des ganzen Siebeneckes, und der drei Proportionaltheile desselben, als auch die Größe des Trapezes J*A*MH, welches für den ersten Proportionaltheil x vom Trapeze *AC* abzuschneiden ist, es ist

Polyg. ABC*D*EFG = 537019,19,
x = 107403,838,
y = 161105,757,
z = 268509,595,
und Trapez. JAMH = 43660,898.

2) Man berechne, wie es bei Nro. 5. der vorigen Auflösung ebenfalls schon geschehen ist, im Trapeze

JAMH aus den bekannten Stücken die Seite AJ, es ist diese $= 62{,}1913$.

3) Aus allen bekannten erforderlichen Winkeln des Trapezes AH, und aus dessen Flächeninhalte, so wie aus der gefundenen Seite MA, oder auch aus dem bekannten Flächeninhalte, und aus den Seiten JA und AM, und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln JAM und AMH berechne man nach dem III. Zusatze des §. 73., oder nach der II. Auflösung des §. 95. im Trapeze AH die Seite MH.

Es ist nach dem III. Zusatze des §. 73., da MHJ $+ AJH < 180°$,

$$HM = -\frac{AM \,.\, \text{Sin. MAJ}}{\text{Sin. (MHJ} + \text{AJH)}} + \sqrt{\left(\left(\frac{AM \,.\, \text{Sin. MAJ}}{\text{Sin. (MHJ} + AJH)}\right)^2 + \frac{2\,\text{Trapez. AH} \,.\, \text{Sin. MAJ}}{\text{Sin. MHJ} \,.\, \text{Sin.(MHJ} + \text{AJH)}}\right)}.$$

Nach der vorstehenden Formel ist

$$\left(\frac{\text{AM} \,.\, \text{Sin. MAJ}}{\text{Sin. (MHJ} + \text{AJH)}}\right)^2 = 670240{,}46,$$

$$\text{und } \frac{2\,\text{Trapez. AH} \,.\, \text{Sin. MAJ}}{\text{Sin. MHJ} \,.\, \text{Sin.(MHJ} + AJH)} = 146677{,}1,$$

$$= 816917{,}56,$$

dann $\sqrt{816917{,}56} = + 903{,}835,$

$$\text{ferner } -\frac{\text{AM} \,.\, \text{Sin. MAJ}}{\text{Sin. (MHJ} + \text{AJH)}} = -\,818{,}682,$$

folglich ist $HM = + \;85{,}153.$

4) Man trage auf der Polygonseite AG vom Punkte A aus die Linie $AJ = 62{,}1913$, und auf der Polygonseite BC vom Punkte M aus die Linie $MH = 85{,}153$ auf, und ziehe von J zu H die gerade Linie JH, es ist diese mit AM parallel, weil MHJ $+$ AMH $=$ MAJ $+$ AJH $= 180°$ (I. §. 38.), und es wird durch die Linie JH sowohl vom Trapeze AC

das verlangte Trapez AH, als auch vom ganzen Siebenecke der erste verlangte Proportionaltheil in der Gestalt des Viereckes ABHJ abgeschnitten, welches = 107403,838.

5) Verfährt man wieder, wie es bei der vorigen Auflösung von Nro. 7 bis 9. geschehen ist, und bestimmt man beim abzuschneidenden Trapeze LP nebst der Seite KP, welche nach der bei Nro. 9. vorgenommenen Berechnung = 294,1364, auch die Seite LG, so findet man diese aus den gegebenen, und schon berechneten Stücken nach dem III. Zusatze des §. 73., oder nach der II. Auflösung des §. 95., oder auch nach §. 4., je nachdem man LG aus dem bekannten Flächeninhalte des Trapezes LP, dann aus der Seite GP, und aus den drei erforderlichen Winkeln, oder aus dem Flächeninhalte, dann aus den Seiten KP und PG, und aus den von ihnen eingeschlossenen Winkeln KPG und LGP, oder auch nur aus den bekannten Seiten und Winkeln berechnet.

Nimmt man die Seite LK als Abszissenlinie an, so ist nach §. 4., da Sin. (KLG + LGP) = Sin. 180° = 0 (II. §. 66.),

$$LG = \frac{-KP \,.\, \text{Sin.}(KLG + LGP + GPK)}{\text{Sin. } KLG} = 231{,}325.$$

6) Man trage auf der Polygonseite ED vom Punkte P aus die Linie PK = 294,1364, und auf der Polygonseite GA vom Punkte G aus die Linie GL = 231,325 auf, und ziehe vom Punkte L zu K die gerade Linie LK; es ist diese, da $LGP + KLG = KPG + LKP = 180°$, mit GP parallel (I. §. 38.), und durch dieselbe wird in der Gestalt des Fünfeckes $GLKEF$ der dritte verlangte Proportionaltheil abgeschnitten, dessen Größe in einem gewissen Flächenmaaße = 268509,595.

7) Das noch übrige mittlere Flächenstück JHCDKL, welches = 161105,757, gibt den zweiten verlangten Proportionaltheil.

Man hat dadurch dieses Siebeneck wieder durch die Theilungslinien JH und LK in drei Theile getheilt, die sich der Ordnung nach zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, dann 3 und 5.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 47.) bei der vorstehenden II. Auflösung die Linien MH und L*G* nach dem III. Zusatze des §. 73., und zugleich nach der II. Auflösung des §. 95., oder nach §. 4. bestimmt werden, so ergibt sich für die gefundenen Linien AJ und PK eine Proberechnung.

II. Zusatz: Hat man (Fig. 47.) zur Bestimmung des Flächeninhaltes des Siebeneckes A*BCD*EFG im Grundrisse unter dem gegebenen, oder beliebig angenommenen Winkel M*AG* von den Ecken aus die Parallellinien gezogen, und will man auf dem Felde zur Vertheilung des Vieleckes keine Parallelen ziehen, so berechne man nach der vorstehenden II. Auflösung die Linien *AJ* und MH, und die Linien PK und L*G* auf die angezeigte Weise, und trage auf der Polygonsseite *AG* die Linien AJ und GL, und auf den Polygonsseiten CB und ED die Linien BH = BM + MH, und EK = EP + PK auf, und ziehe dann die Theilungslinien JH und LK.

III. Zusatz: Nach der vorstehenden zweifachen Auflösung ist (Fig. 47.) der dritte Proportionaltheil z = x + y, da 268509,595 = 107403,838 + 161105,757 (Auflös. I. Nro. 3.); deßwegen theilet die Linie KL das Siebeneck auch in zwei gleiche Theile, und diese sind das Sechseck ABCDKL, und das Fünfeck LKEF*G*.

IV. Zusatz: Die Auflösung geschieht auf dieselbe Weise (Fig. 47.), wenn am Punte *B* in der nämlichen Ebene unter einem gegebenen, oder beliebig gewählten Winkel, dessen Größe etwa = 20° 43', zur Polygonsseite BA eine gerade Linie UW angenommen, und mit ihr von allen Ecken der Figur aus Parallelen gezogen werden, um diese letztere in Trapezen zu theilen; es ist dann WB*A* = 20° 43' = BAM (I. §. 41.), und MAN = M*AG* = B*AG* — *B*AM = A — B*A*M = 121° 13' — 20° 43' = 100° 30'.

Anmerkung: 1) Man ersieht aus den bisher angeführten Lehren der Polygonometrie, und aus ihrer Anwendung, wie nützlich ihre Kenntnisse in der praktischen Geometrie und Trigonometrie bei der Verfertigung der Grundrisse, dann bei der Bestimmung der unbekannten Seiten, Winkel und Diagonallinien geradlinigter ebener Figuren, oder auch überhaupt gerad

gebrochener, in der nämlichen Ebene liegender Linien, und bei der Flächenbestimmung und Vertheilung der Grundstücke sind.

2) Der Zweck, welchen ich bei der Bearbeitung des gegenwärtigen Theiles meines Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie, wie bei den übrigen Theilen desselben, vor Augen hatte, und den ich in der Vorrede näher erörtere, erlaubt mir nicht, zum Behufe der Anwendung der polygonometrischen Lehren mehrere praktische Fälle anzuführen, zumal da dieser Band schon durch die ausführliche wissenschaftliche Darstellung und Begründung derselben, auf welche ich bei einem, für höhere Studienanstalten bestimmten Lehrbuche mein Augenmerk ganz vorzüglich richten mußte, so sehr erweitert wurde. Aus diesem Grunde mache ich wegen der im Anhange vorkommenden Beispiele zur Uibung in polygonometrischen Berechnungen nur mehr auf nachstehende drei Fälle aufmerksam, bei welchen sich die Lehrsätze der Goniometrie ebenfalls vortheilhaft anwenden lassen:

a) Soll man (Fig. 17.) die unzugängliche Weite AF finden, wenn dieselbe so groß ist, daß man sie nicht wohl aus einer einzigen Standlinie bestimmen, und man auch von A nach F nicht hinsehen kann, so hänge man die Punkte A und F durch schicklich gewählte Standlinien, welche die gesuchte Weite AF auch durchschneiden dürfen, zusammen, so daß jene mit dieser in der nämlichen Ebene eine gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie bilden, bei welcher außer der gesuchten Weite AF, und den ihr anliegenden Winkeln A und F alle übrigen Stücke bekannt sind, im Falle der Ordnung nach die einzelnen Theile AB, BC, CD, DE und EF, und ihre Winkel B, C, D und E gemessen, und diese letzteren, welche nicht sehr spitzig, oder sehr stumpf sein dürfen, durch die Hilfswinkel geprüft werden, die sich ergeben, wenn man allemal die zwei nächsten Standlinien durch eine dritte zu einem Dreiecke verbindet; und es geschieht die Berechnung der gesuchten Weite AF nach den im §. 30. angegebenen Auflösungen, wofür in den §§. 31 und 32. Beispiele angeführt sind.

b) Soll man (Fig. 17.) die Entfernung zweier Oerter A und F finden, die sich zwar wegen ihrer Größe aus einer einzigen Standlinie nicht messen, aber doch ganz übersehen läßt, und verfährt man auf die vorige Weise, und mißt man überdieß nebst den Linien AB, BC, CD, DE und EF, und den Winkeln B, C, D und E auch noch die Winkel BAF und AFE mit der beigefügten Prüfung, ob alle Winkel gehörig gemessen

sind, so weiß man bei der gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie ABCDEF alle Stücke außer der gesuchten Entfernung AF, und man kann diese letztere nach §. 30., oder auch gleich unmittelbar nach §. 4. finden, wenn man sie als Abszissenlinie, und einen ihrer Endspunkte als Anfangspunkt annimmt.

c) Soll man endlich (Fig. 17.), wie dieses der Fall ist, wenn man Straßen anlegt, oder Alleen durch einen Wald hauen läßt, bei zwei Oertern A und F, welche so weit von einander entfernt sind, daß man von einem zum anderen nicht hinsehen kann, die Richtung der Linie AF finden, und verfährt man wieder bei der Bezeichnung der benöthigten Standlinien, wie bei den vorausgehenden zwei Fällen, so kann man aus den bekannten Linien, AB, BC, CD, DE und EF, und aus den richtig gemessenen Winkeln B, C, D und E sowohl nach §. 30., als auch unmittelbar nach §. 7. aus den gemessenen Stücken den Winkel BAF berechnen, durch welchen die gesuchte Richtung der Linie AF bestimmt wird.

Anhang,

welcher für die Berechnung der unbekannten, und gesuchten Stücke die Seiten oder einzelnen Linien, und die Winkel einiger geradlinigter ebener Figuren, und gerad gebrochener, in der nämlichen Ebene liegender Linien enthält.

Ich füge zur Uibung in polygonometrischen Berechnungen noch die betreffenden bekannten Stücke einiger geradlinigter ebener Figuren, und gerad gebrochener Linien für die Bestimmung der unbekannten Stücke bei, und bezeichne wieder der Ordnung nach die Seiten der Figuren, und die einzelnen Theile der gebrochenen Linien mit den Buchstaben a, b, c und d ꝛc., und die Winkel, welche in eben dieser Ordnung den Seiten der Figuren, oder den einzelnen Theilen der gebrochenen Linien anliegen, mit den Buchstaben A, B, C, D ꝛc. (§. 3. Zus. V.), während, wie es bisher der Fall gewesen ist, bei geradlinigten ebenen Figuren die gegebenen, und die gesuchten Winkel immerhin nur diejenigen Winkel sind, welche auf der inneren Seite der

Figuren vorkommen (§. 10. Anmerk. 3.), und zugleich sowohl bei den geradlinigten ebenen Figuren, als auch bei den gebrochenen Linien die gesuchten Seiten oder einzelnen Linien, und die unbekannten Winkel mit den Buchstaben x, y und z bezeichnet werden.

I.

Man berechne bei nachstehenden geradlinigten ebenen Figuren, um sie in Grundriß zu legen, aus allen bekannten Seiten und Winkeln mittels einer als Basis angenommenen Seite die Abszissen und Ordinaten (§. 10.), und aus diesen (§. 87.), oder unmittelbar aus allen gegebenen Seiten und Winkeln (§. 97 und 100.), oder auch dadurch den Flächeninhalt dieser Figuren, daß man sie durch Diagonallinien in Dreiecke (§. 60 und 62.), oder in Vierecke überhaupt (§. 85.), oder durch Parallellinien in Trapezen abtheilt (§. 89.), und man theile zugleich diese Figuren, von welchen alle Seiten und Winkel bekannt sind, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder in eine bestimmte Anzahl ungleicher Theile nach einem gegebenen Verhältnisse entweder mittels der Triangulärmethode (§. 103.), oder auch dadurch, daß die Figuren durch Diagonalen in Vierecke überhaupt, oder in Trapezen abgetheilt werden (§. 107.).

1.

Die gegebenen Stücke eines Fünfeckes:

Die Seiten.	Die Winkel.
a = 315,	A = 119° 51' 48",
b = 412,	B = 84° 57' 10",
c = 351,	C = 130° 44' 56",
d = 325,	D = 90° 51' 16",
e = 409;	E = 113° 34' 50".

2.

Die bekannten Stücke eines Fünfeckes:

Die Seiten.	Die Winkel.
a = 412,	A = 130° 44' 56",
b = 315,	B = 84° 57' 10",
c = 409,	C = 119° 51' 48",
d = 325,	D = 113° 34' 50",
e = 351;	E = 90° 51' 16".

3.

Die gegebenen Stücke eines Sechseckes:

Die Seiten.	Die Winkel.
a = 1024,	A = 162° 2′ 22″,
b = 777,	B = 55° 22′ 45″,
c = 482,	C = 250° 1′ 4″,
d = 991,	D = 73° 13′ 37″,
e = 1308,	E = 105° 10′ 34″,
f = 846;	F = 74° 9′ 38″.

4.

Die bekannten Stücke eines Zeheneckes:

Die Seiten.	Die Winkel.	Die Seiten.	Die Winkel.
a = 84,	A = 126°,	f = 122,	F = 239°,
b = 94,	B = 206°,	g = 72,	G = 136°,
c = 97,	C = 126°,	h = 174,	H = 75°,
d = 140,	D = 71°,	i = 94,292,	J = 112°,
e = 98,	E = 145°,	k = 64,235;	K = 204°.

5.

Die gegebenen Seiten eines Siebenzeheneckes:

Die Seiten.	Die Winkel.
a = 1075,	A = 46° 27′ 48″,
b = 807,	B = 315° 10′ 22″,
c = 610,	C = 215° 7′ 34″,
d = 1027,	D = 65° 44′ 24″,
e = 1065,	E = 93° 5′ 21″,
f = 545,	F = 287° 15′ 38″,
g = 765,	G = 223° 9′ 47″,
h = 1665,	H = 29° 42′ 40″,
i = 1226,	J = 106° 44′ 15″,
k = 777,	K = 270° 45′ 45″,
l = 482,	L = 250° 1′ 4″,
m = 991,	M = 73° 13′ 37″,
n = 1308,	N = 105° 10′ 34″,
o = 846,	O = 74° 9′ 38″,
p = 1055,	P = 303° 59′ 47″,
q = 712,	Q = 93° 22′ 8″,
r = 2396;	R = 146° 20′ 54″.

II.

Man berechne bei folgenden geradlinigten ebenen Figuren die unbekannten Seiten und Winkel, im Falle

alle übrigen Seiten und Winkel bekannt sind, nach den im II., III. und IV. Abschnitte des II. Hauptstückes angegebenen Vorschriften, je nachdem aus den bekannten Seiten und Winkeln zwei Seiten und ein Winkel (§. 20, 23 und 27.), oder eine Seite und zwei Winkel (§. 30, 33 und 35.), oder auch drei Winkel (§. 39 und 43.) zu finden sind, und man berechne bei den nachstehenden, oder auch bei den vorausgehenden fünf Vielecken aus allen bekannten Seiten und Winkeln für gewisse Ecke die verlangten Diagonallinien (§. 47.).

1.

Die bekannten, und die gesuchten Stücke eines Fünfeckes, bei welchem zwei Seiten und ein Winkel unbekannt sind:

Die Seiten.	Die Winkel.
a = 545,	A = 119° 57′ 50″,
b = 765,	B = 223° 9′ 47″,
c = 1665,	C = 29° 42′ 40″,
d = x,	D = 106° 44′ 15″,
e = y;	E = z.

2.

Die gegebenen, und die gesuchten Stücke eines Fünfeckes, bei welchem eine Seite, und zwei Winkel unbekannt sind, und zugleich die vom Ecke A zum Ecke D gezogene Diagonallinie AD gesucht wird:

Die Seiten.	Die Winkel.	Die Seiten.	Die Winkel.
a = 362,	A = 65° 45′,	d = 355	D = y,
b = 138,	B = 68° 10′,	e = x;	E = z.
c = 196,	C = 263° 52′,		

3.

Die bekannten, und die gesuchten Stücke eines Fünfeckes, bei welchem drei Winkel, und die vom Ecke A zum Ecke C gezogene Diagonallinie AC gesucht wird:

Die Seiten.	Die Winkel.	Die Seiten.	Die Winkel.
a = 371,	A = 63° 8′,	d = 325,	D = y,
b = 361,	B = 144° 45′,	e = 477;	E = z.
c = 303,	C = x,		

4.

Die gegebenen, und die gesuchten Stücke eines Achteckes, bei welchem nebst einer beliebigen Diagonallinie eine Seite, und zwei Winkel gesucht werden:

Die Seiten.	Die Winkel.	Die Seiten.	Die Winkel.
a = 187,	A = x,	e = 106,	E = 99°,
b = x,	B = 79°	f = 77,	F = 47°,
c = 120,	C = 143°	g = 139,	G = 280°,
d = 76,	D = y,	h = 118;	H = 247°.

5.

Die bekannten, und die gesuchten Stücke eines Achteckes, bei welchem nebst drei Winkeln zwei beliebige Diagonallinien gesucht werden:

Die Seiten.	Die Winkel.	Die Seiten.	Die Winkel.
a = 187,	A = x	e = 106,	E = 99°,
b = 196,67,	B = 79°	f = 77,	F = z,
c = 120,	C = 143°	g = 139,	G = 280°,
d = 76,	D = y,	h = 118;	H = 247°.

III.

Man berechne bei folgenden Vierecken den Flächeninhalt:

1.

Bei einem Vierecke, bei welchem die eine Diagonallinie AC = 3045,6, und die andere BD = 2840,6, und der von ihnen eingeschlossene Winkel = 76° 28' (§. 69.).

2.

Bei einem Vierecke, bei welchem die Seite a = 1777, und b = 1944, und überdieß der Winkel A = 89° 37' 9", dann C = 105° 36' 44", und D = 87° 37' 50" (§. 73.).

3.

Bei einem Vierecke, bei welchem die Seite a = 1232, dann c = 1185, und d = 1028, und überdieß der Winkel A = 124° 1' 38", und D = 68° 57' 30" (§. 79.).

4.

Bei einem Vierecke, bei welchem die Seite a = 1230, dann c = 1184, und d = 1030, und überdieß der Winkel A = 114° 20', dann C = 108° 34', und D = 70° 24' (§. 81.).

5.

Endlich bei einem Vierecke, bei welchem die Seite

a = 274,2, dann b = 370,4, ferner c = 222,7, und und d = 273, und überdieß der Winkel B = 62° 14′ 30″, und D = 87° (§. 83.).

IV.

Man soll die unzugängliche Weite AF, und zugleich die Richtung AF, oder den Winkel BAF finden, wenn die einzelnen Theile, und die Winkel der gerad gebrochenen Linie, welche in der nämlichen Ebene liegt, und die Punkte A und F zu ihren Endspunkten hat, folgende Größe haben (§. 110. Anmerk. 2):

Die einzelnen Theile.	Die Winkel derselben.	Die einzelnen Theile.	Die Winkel derselben.
a = 4100,	A = BAF = x,	d = 3210,	D = 233° 41′,
b = 2510,	B = 91° 55′,	e = 1710;	E = 306° 48′.
c = 830,	C = 74° 36′,		

Anmerkung: 1) Weil im II. Theile dieses Lehrbuches beim Vortrage der Plantrigonometrie über die Flächenberechnungen der Dreiecke, und die Berechnungen ihrer unbekannten Seiten und Winkel, und auch in diesem Theile mehrere Beispiele über die Bestimmung der Dreiecksflächen vorkommen, so führte ich hier über die Dreiecke keine Aufgaben mehr an.

2) Der Kürze wegen habe ich hier, besonders bei Nro. I., damit ich bei denselben Figuren die nämlichen gegebenen Stücke nicht öfters aufführen mußte, mehrere Aufgaben vereiniget, die man bei der wirklichen Berechnung nach dem bezeichneten oder gewählten Zwecke ohne Anstand selbst gehörig abtheilen kann.

3) Die Berechnung der Abzissen und Ordinaten mittels aller bekannten Seiten und Winkel, und des Flächeninhaltes geradlinigter ebener Figuren aus den vorhin gefundenen Abszissen und Ordinaten kann bequem in einer tabellarischen Form geschehen, bei welcher der Ordnung nach in besonderen Spalten die Winkel, dann ihre Summen und Supplementswinkel, ferner die Seiten, und hierauf mittels Beifügung der betreffenden Logarithmen die gefundenen positiven und negativen Abszissen und Ordinaten nebst den positiven und negativen Produkten über den Flächeninhalt aufgeführt werden, im Falle dieser letztere auch noch zu bestimmen ist (§. 88. Anmerk. 3.).

Inhalt

Die Polygonometrie, oder vielmehr die Goniometrie.

I. Hauptstück.

Grundlehren der Polygonometrie.

I. Abschnitt.

Erklärungen und Lehrsätze, die Ordinaten und Abszissen gebrochener gerader Linien betreffend S. 1. §. 1 bis §. 6.

II. Abschnitt.

Lehrsätze zur Bestimmung der Tangens, dann des Kosinus, und des Quadrates einer Seite einer gerad gebrochenen, in sich selbst zurückkehrenden Linie S. 37. §. 7 — §. 9.

III. Abschnitt.

Die Berechnung der Abszissen und Ordinaten, um aus den bekannten Seiten und Winkeln einer geradlinigten ebenen Figur, und aus den einzelnen Theilen und Winkeln einer gebrochenen Linie diese letztere, und die Figur in Grundriß zu legen . . S. 45. §. 10 — §. 17.

II. Hauptstück.

Bestimmung der Seiten, und Winkel geradlinigter ebener Figuren, oder überhaupt gebrochener, in sich selbst zurückkehrender und in der nämlichen Ebene liegender gerader Linien.

I. Abschnitt.

Darstellung aller möglichen Aufgaben nebst Anführung der dabei vorkommenden besonderen Fälle S. 69. §. 18 — §. 19.

II. Abschnitt.

Bestimmung zweier Seiten, und eines Winkels S. 70. §. 20 — §. 29.

III. Abschnitt.

Bestimmung einer Seite, und zweier Winkel S. 92. §. 30 — §. 38.

IV. Abschnitt.

Bestimmung dreier Winkel S. 126. §. 39 — §. 48.

III. Hauptstück.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes geradliniger ebener Figuren zu ihren Seiten und Winkeln.

I. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Dreieckes zu seinen Seiten und Winkeln.
Lehrsätze und Beispiele hierüber S. 167. §. 49 bis §. 59.
Aufgaben zur Bestimmung des Flächeninhaltes geradliniger ebener Figuren aus den bekannten Seiten und Winkeln nach der Triangulärmethode, und zur Abschneidung gegebener Dreiecke von geradlinigten ebenen Figuren S. 193. §. 60 — §. 67

II. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Viereckes zu seinen Seiten und Winkeln.
Lehrsätze und Beispiele hierüber S. 217. §. 68 — §. 84.
Aufgaben zur Bestimmung des Flächeninhaltes geradliniger ebener Figuren durch ihre Vertheilung in Vierecke überhaupt, oder in Trapezen, und zur Abschneidung gegebener Vierecke von geradlinigten ebenen Figuren S. 254. §. 85 — §. 96.

III. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Vieleckes zu seinen Seiten und Winkeln.
Lehrsätze und Beispiele hierüber S. 289. §. 97 — §. 102.
Aufgaben zur Vertheilung geradliniger ebener Figuren in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse, im Falle dieselben durch Diagonalen in Dreiecke, oder entweder in Vierecke überhaupt, oder in Trapezen getheilt werden . . S. 310. §. 103 — §. 110.

Anhang,

welcher die Seiten und Winkel einiger geradliniger ebener Figuren, und gerad gebrochener, in der nämlichen Ebene liegender Linien zur Uibung in polygonometrischen Berechnungen enthält . . . . . S. 345.

Verbesserung:

Man lese Seite 115. Zeile 4. »— Cos. 80° 43′ anstatt — Cos. (C + D)«, dann Seite 206. Zeile 8. »Log. Sin. B anstatt Log. 2△ ABC«, ferner Seite 232. Zeile 8. »Sin. $(A + D)^2$ anstatt Sin. (A + D)«, und Seite 248. Zeile 12. »190,0003 anstatt 190,0001«.

Tab. I.

Fig. 4.

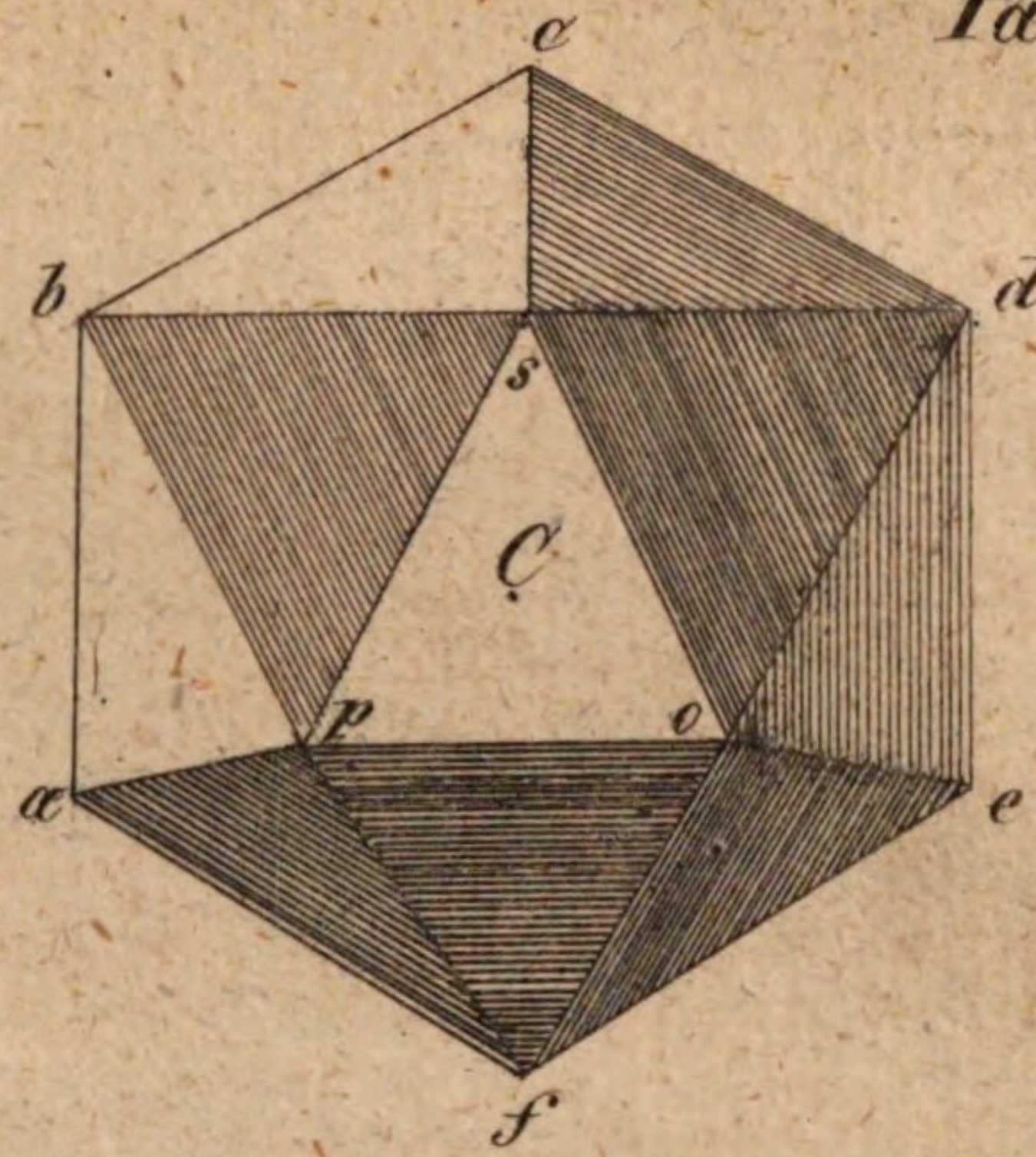
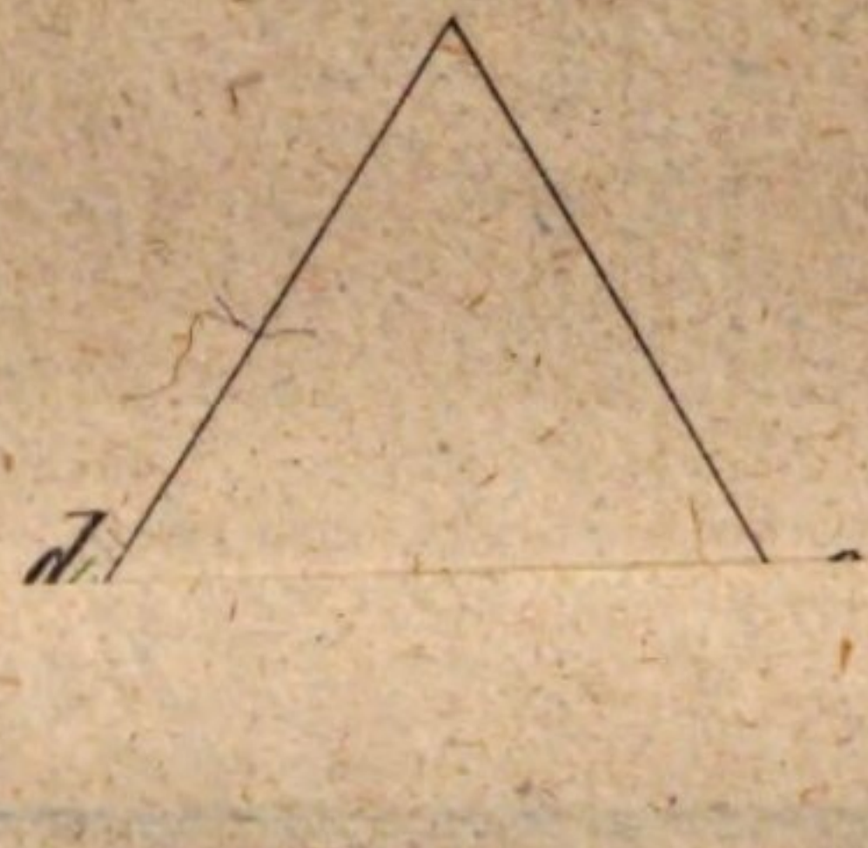


Fig. 7.



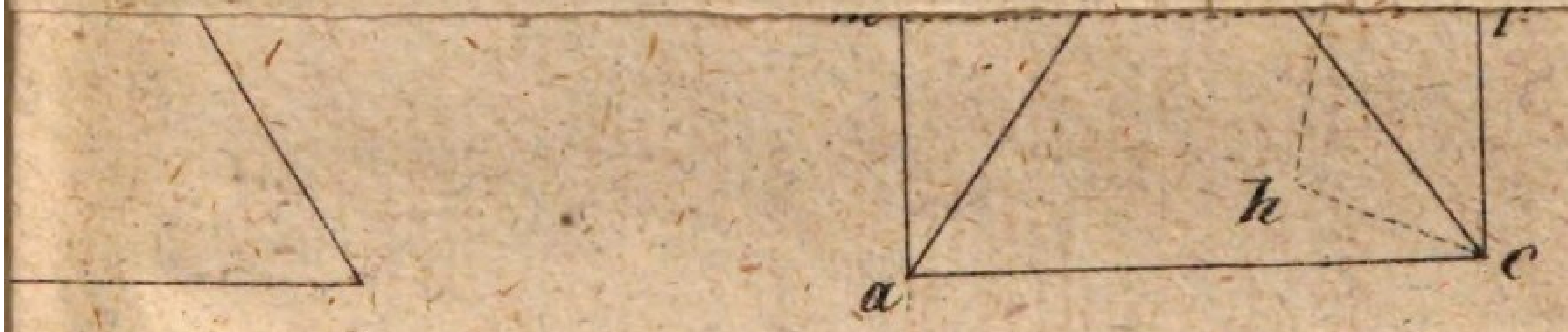
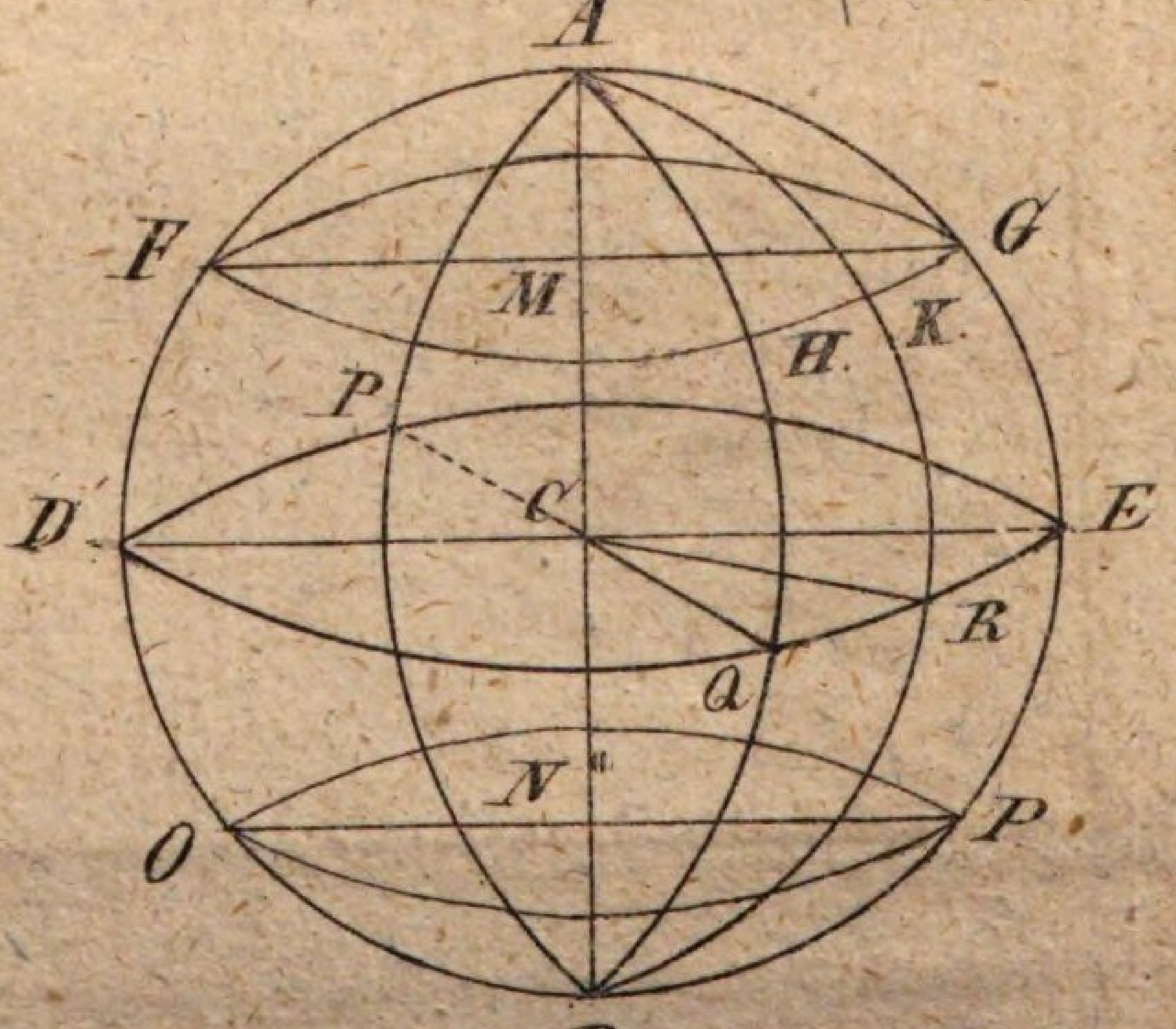


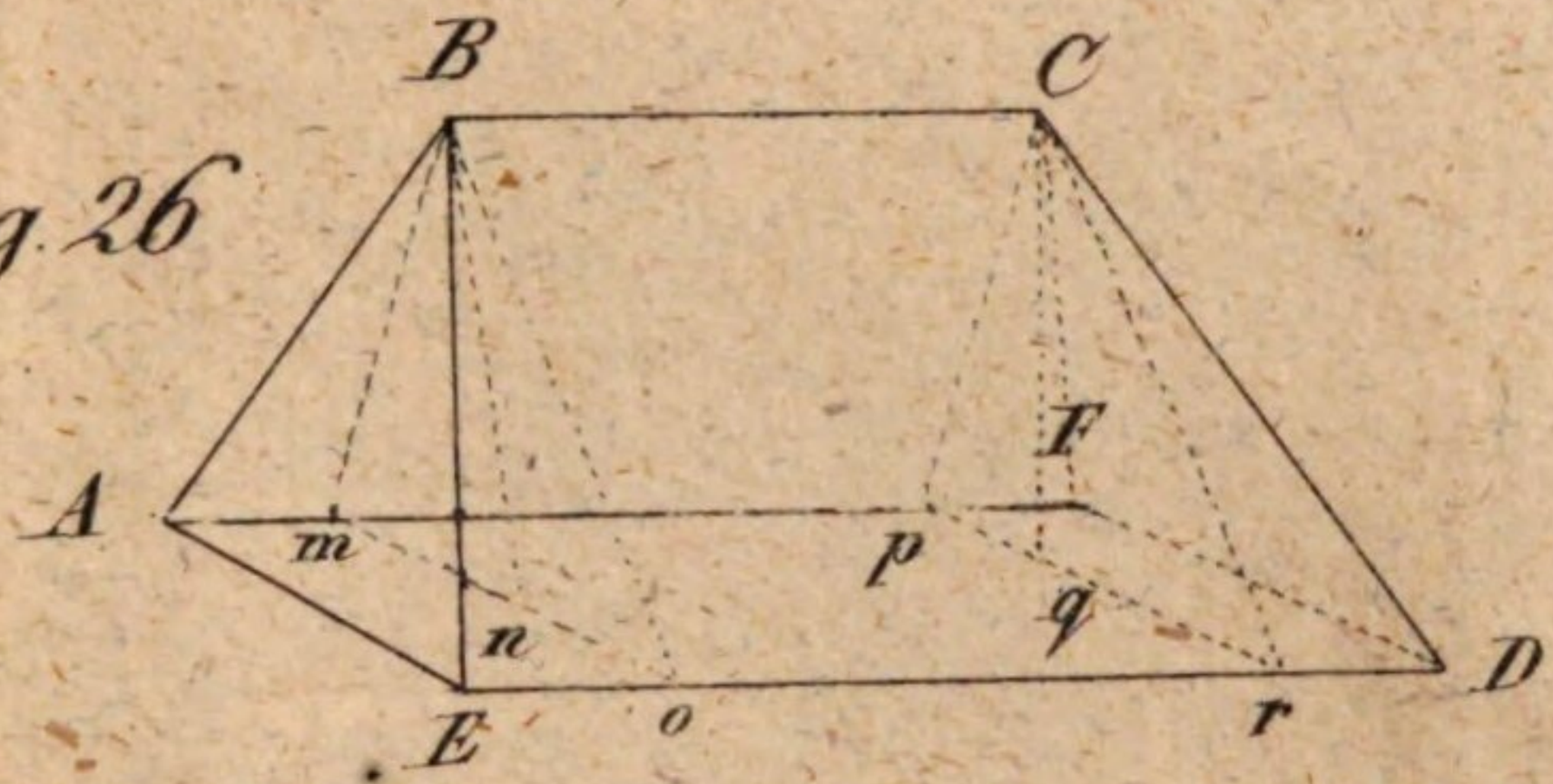
Fig. 23.



Bundschue's Geom. u. Trigonom. II. Theil.

Tab. III.

Fig. 26



Bun

Tab. V.

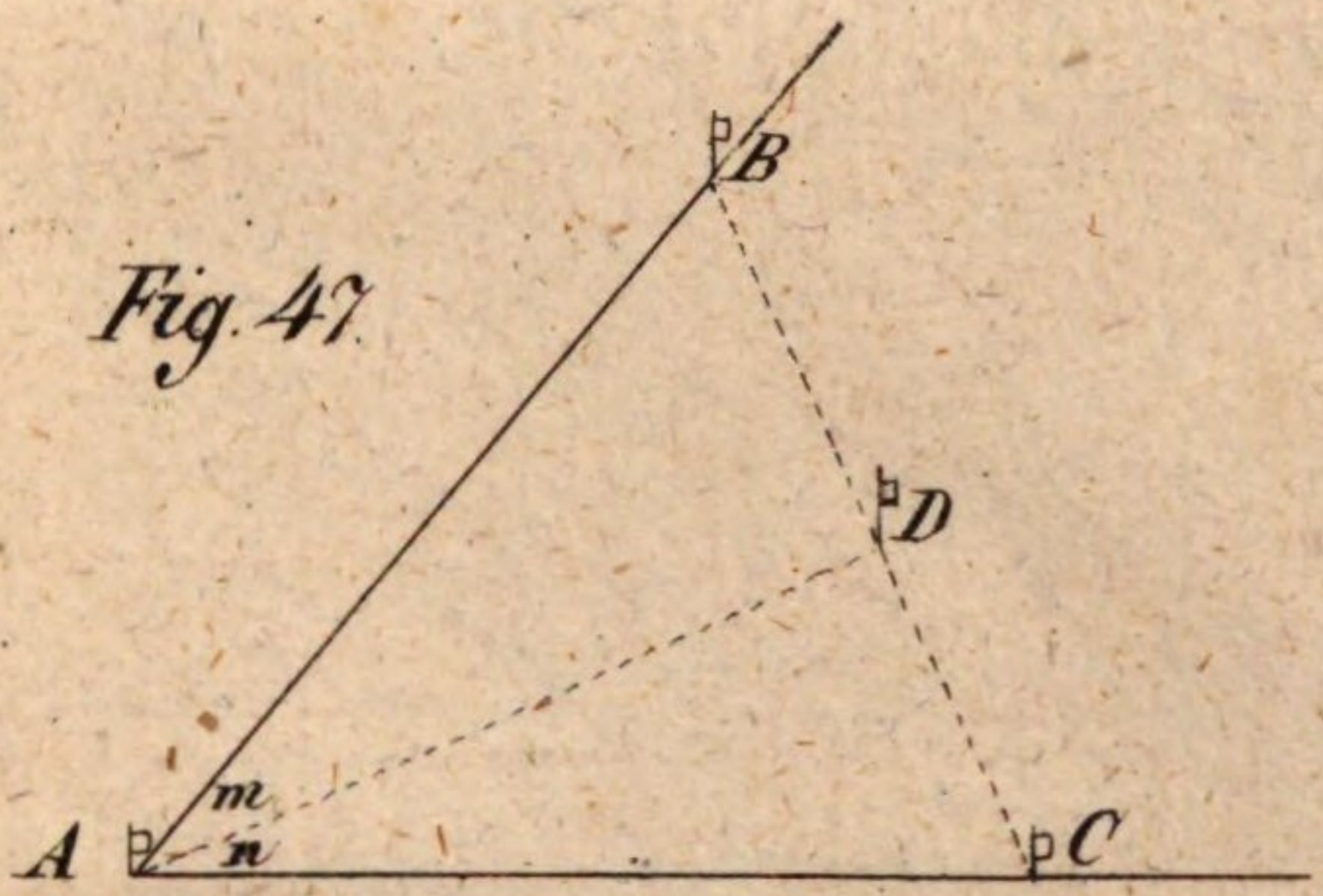
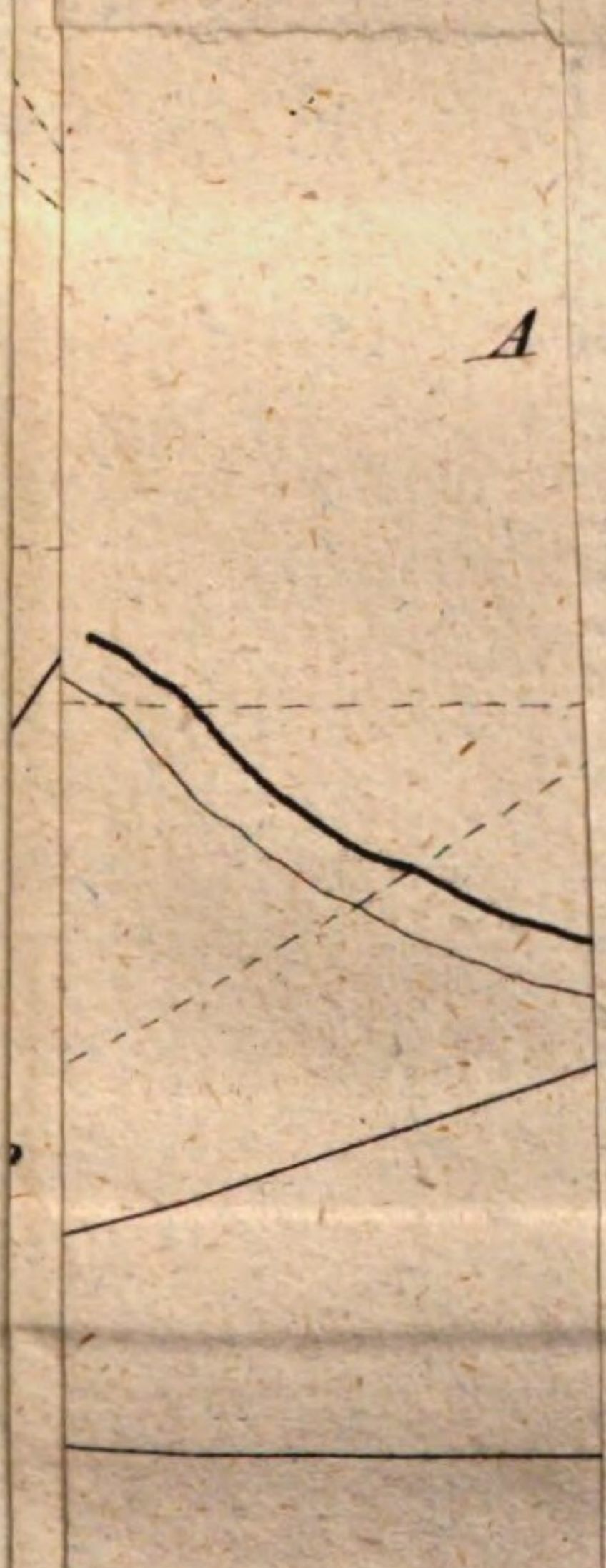


Fig. 47.


A

Tab. VII.

Fig. 70.

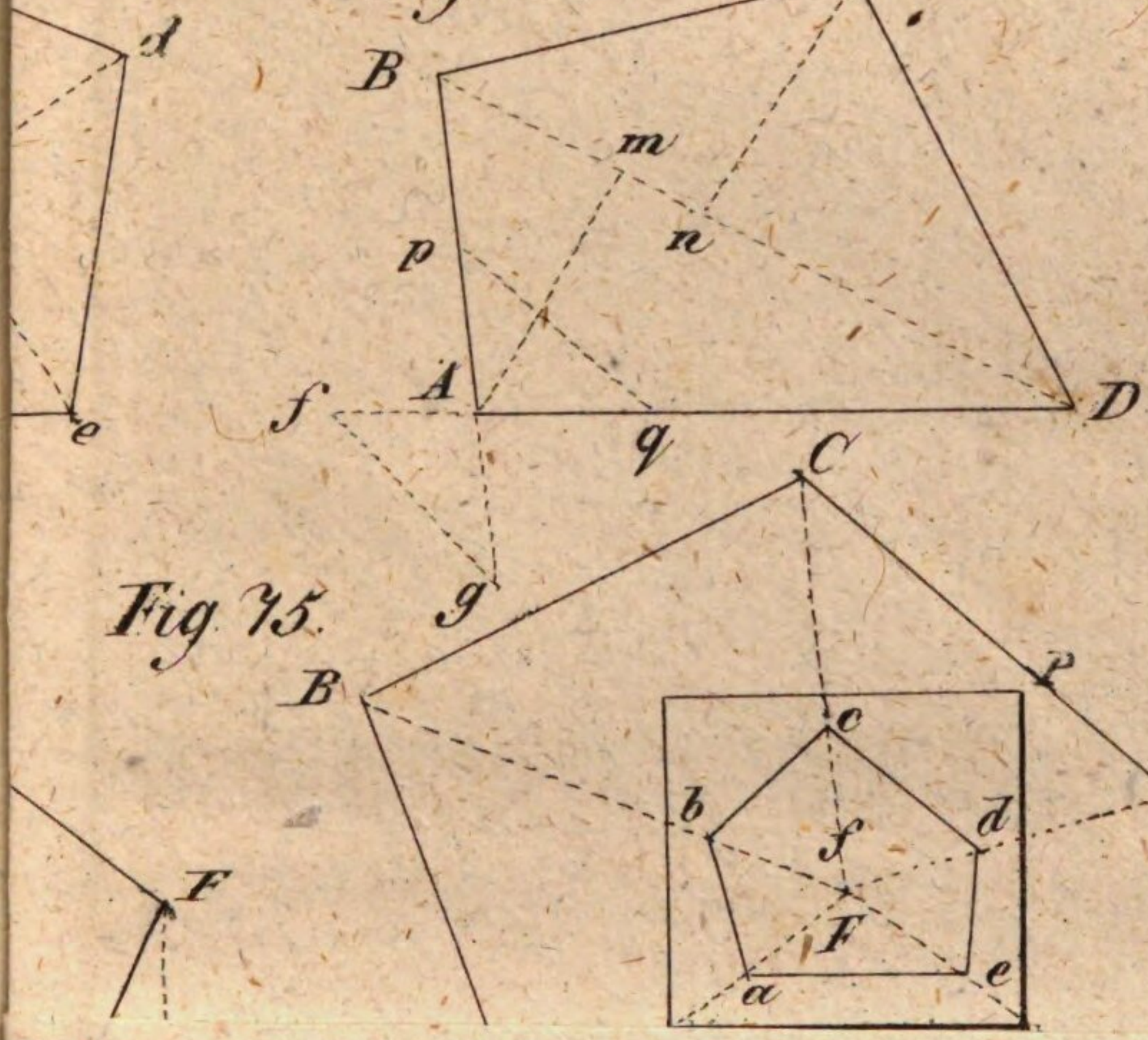


Fig. 75.

a

im §

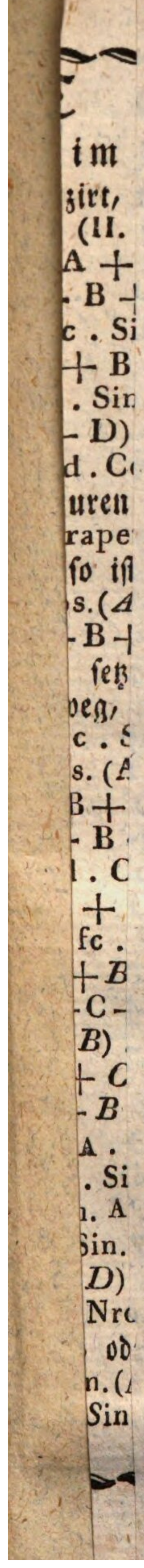
an, 1
as heif
Sin. (

ung (§
+ B) -
) + c²
+ C +
Sin. A
+ B +
². Sin
die Al

Cos. (A

ung (§
A + B
B + (
Cos. (
C + D
+ D -
os. (A
1, dai
(A + D
§. 86.
i Nro.
s. (B +
l² + 2a
e²;
tze (Al
os. B +
bd . C

die folg



F

Fig: Taf I

Fig. 5.

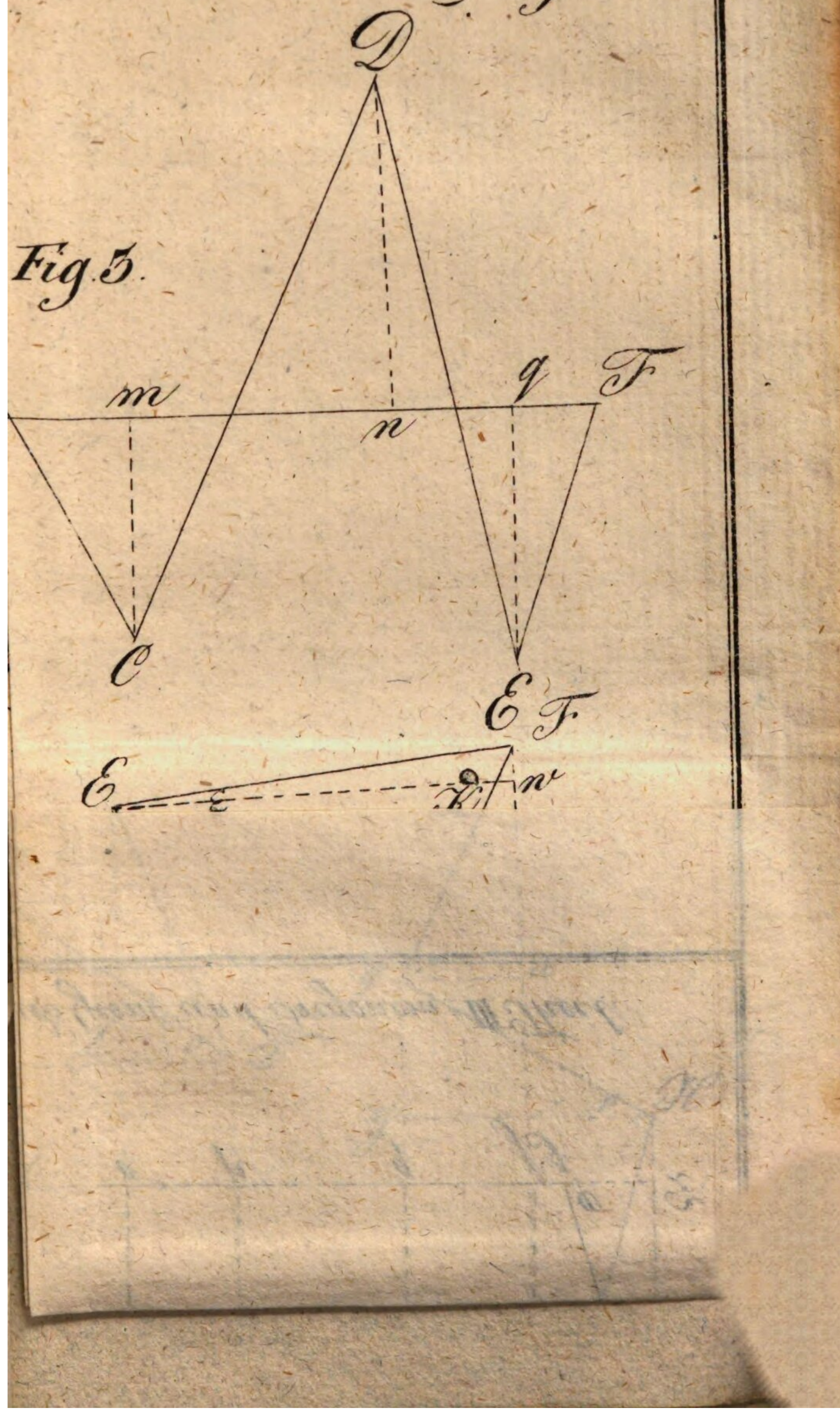


Fig. Taf. II.

Fig. 14.

Fig. Taf. III.

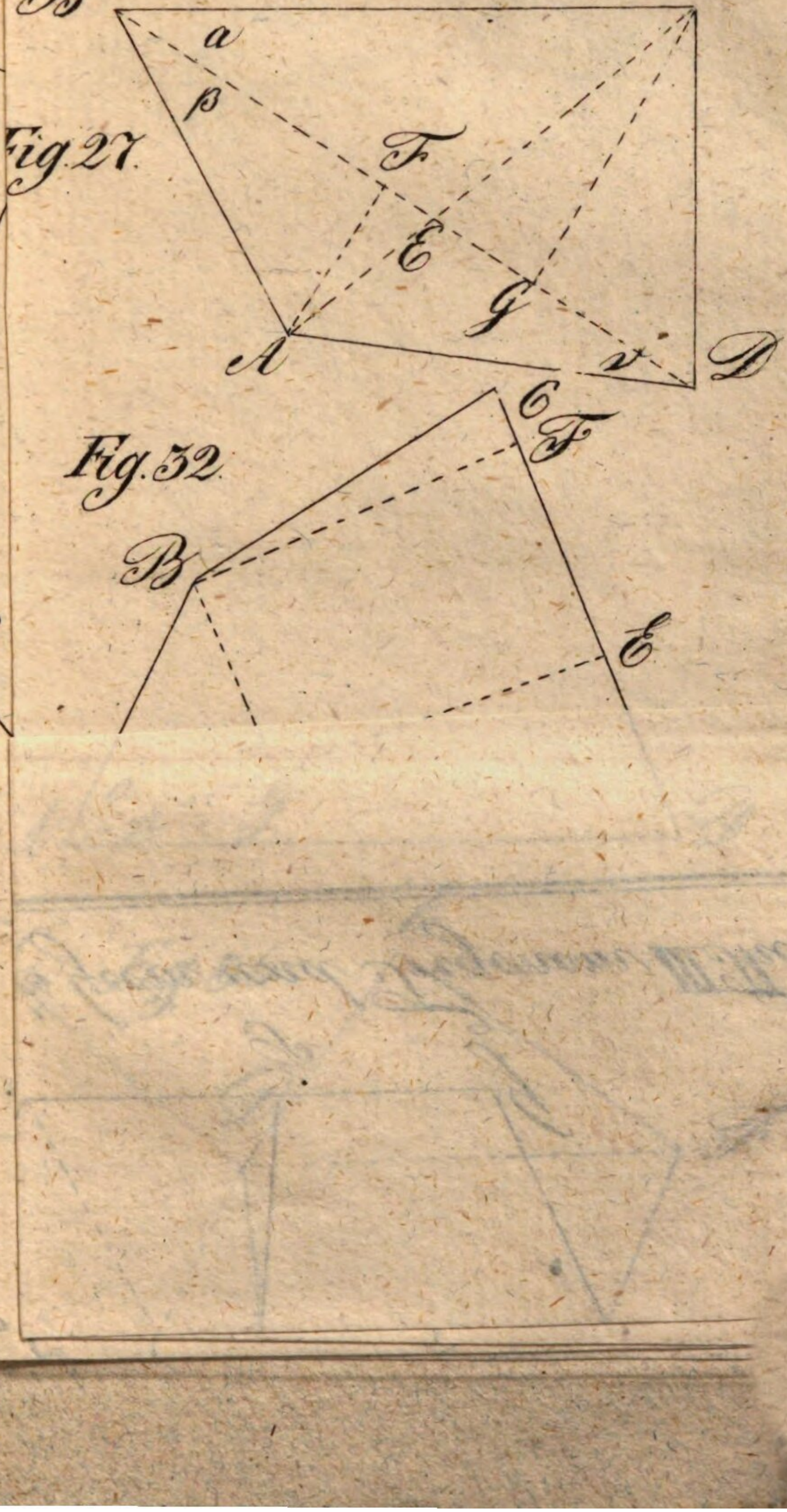


Fig. 27.

Fig. 32.

Fig. Taf. IV.

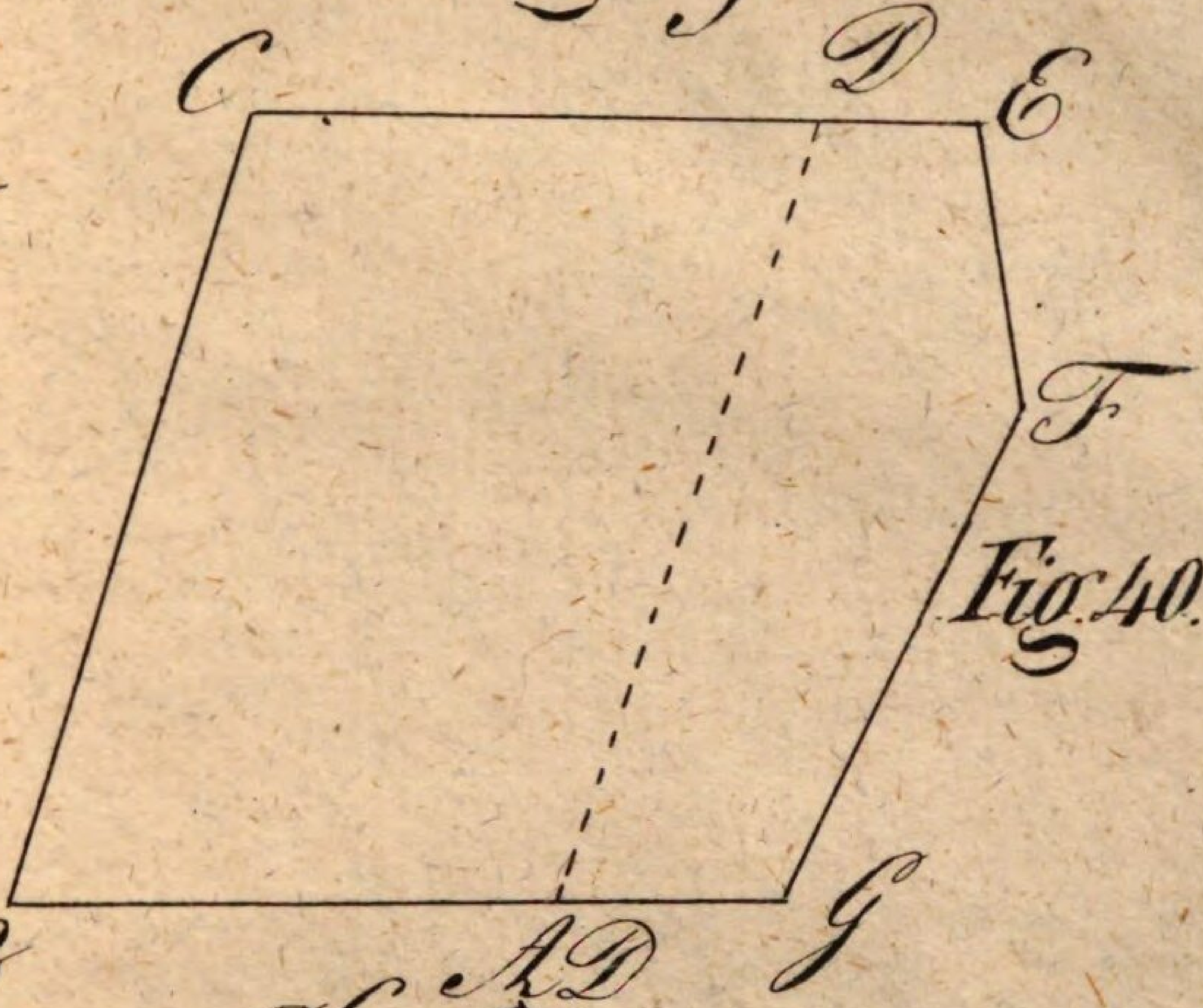


Fig. 40.

Fig. 44.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 3.

Kempten 1818

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 107
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267394-8